



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## FYZIKA PRO II. ROČNÍK GYMNÁZIA

# 8. KMITÁNÍ MECHANICKÉHO OSCILÁTORU

**Mgr. Monika Bouchalová**

Gymnázium, Havířov-Město, Komenského 2, p.o.

Tato prezentace vznikla na základě řešení projektu OPVK, registrační číslo: CZ.1.07/1.1.24/01.0114  
s názvem

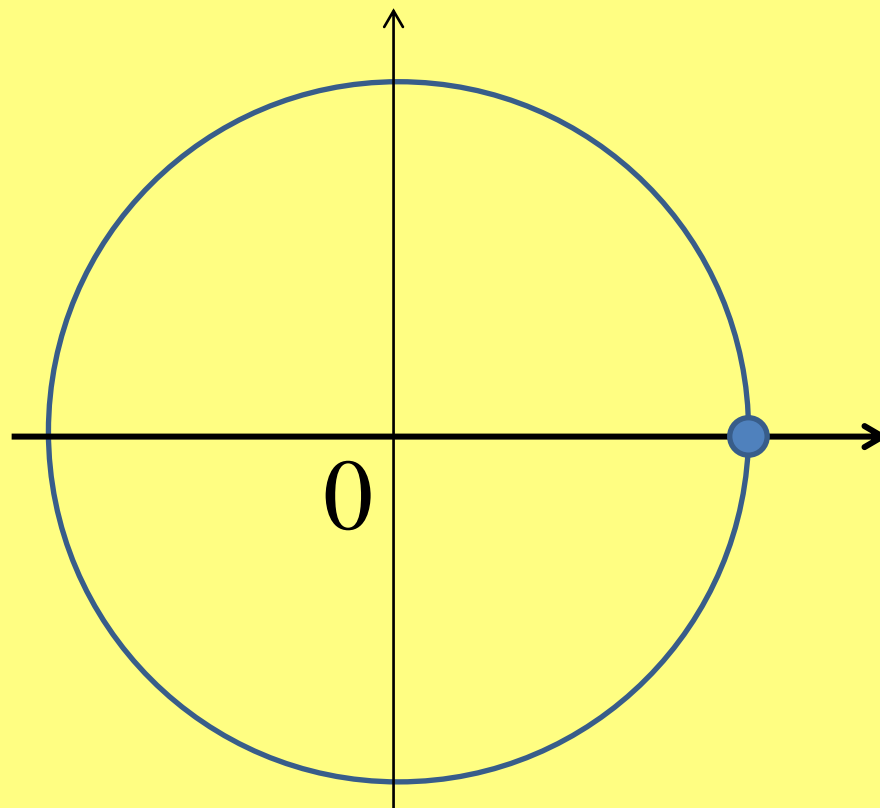
„PODPORA CHEMICKÉHO A FYZIKÁLNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ NA GYMNÁZIU KOMENSKÉHO V HAVÍŘOVĚ“

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

1. kmitavý pohyb
2. harmonický pohyb
3. rychlost a zrychlení kmitavého pohybu
4. fáze kmitavého pohybu
5. složené kmitání
6. dynamika kmitavého pohybu
7. kyvadlo
8. přeměny energie v mechanickém oscilátoru
9. nucené kmitání mechanického oscilátoru
10. rezonance mechanického oscilátoru

# OPAKOVÁNÍ – POHYB POKRUŽNICI

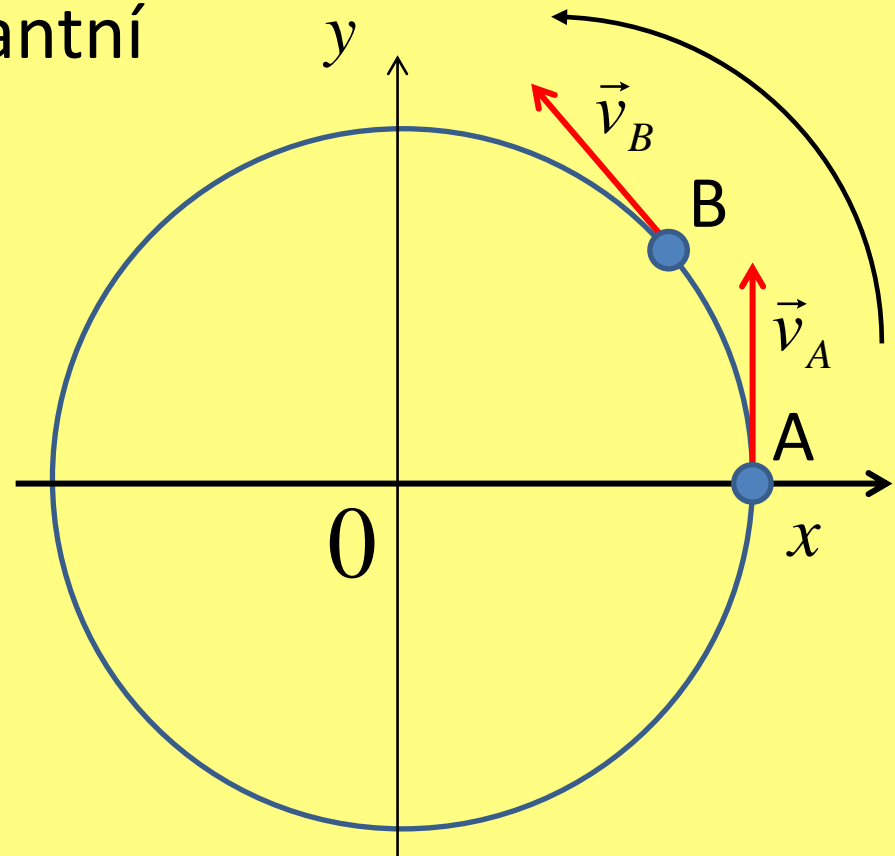
Rovnoměrný pohyb po kružnici je pohyb **periodický**.



# OPAKOVÁNÍ – POHYB POKRUŽNICI

**směr** rychlosti – tečna ke kružnici

**velikost** rychlosti – konstantní



# OPAKOVÁNÍ – POHYB POKRUŽNICI

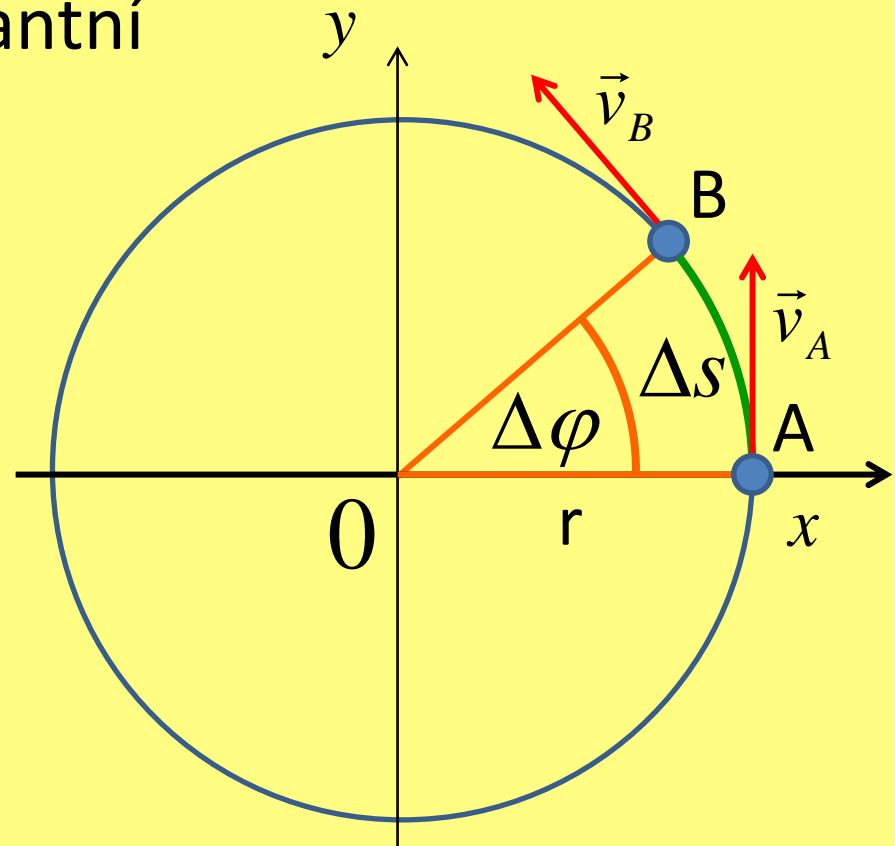
**směr** rychlosti – tečna ke kružnici

**velikost** rychlosti – konstantní

**úhlová dráha**  $\Delta\varphi$

(středový úhel)

poměr délky oblouku  
kružnice a poloměru



$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$$

$$[\varphi] = \text{rad (radián)}$$

# OPAKOVÁNÍ – POHYB POKRUŽNICI

## úhlová rychlost

podíl úhlové dráhy,  
kterou průvodič opíše  
za dobu  $\Delta t$  a této doby

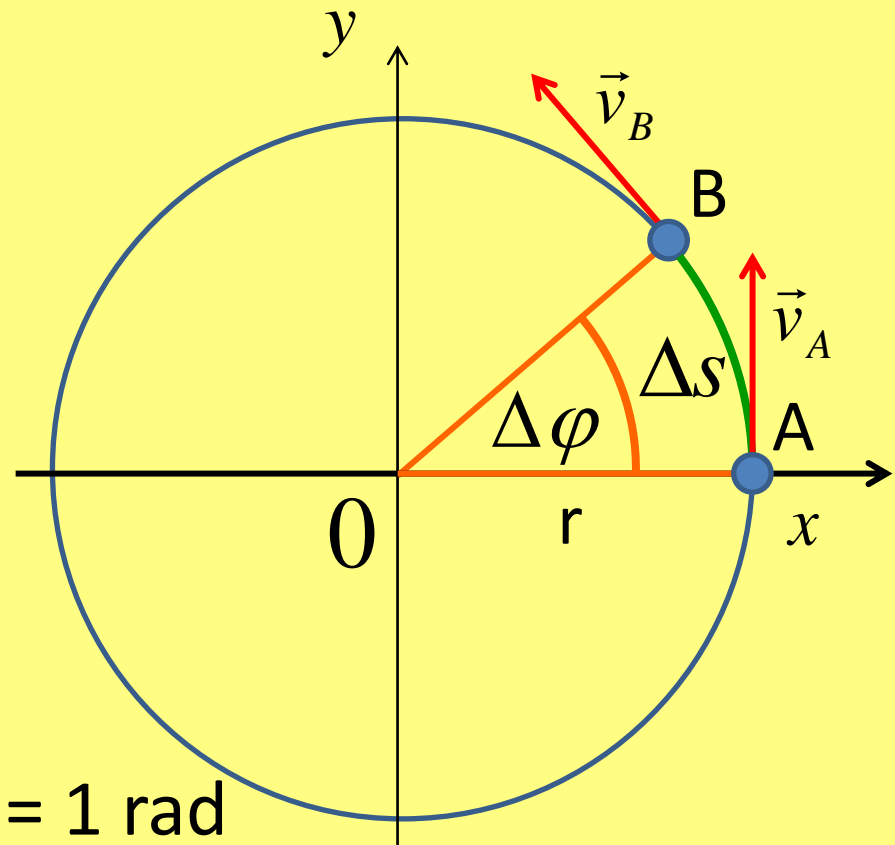
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$[\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} = \text{s}^{-1}$$

Je-li  $\Delta s = r$  pak  $\Delta\varphi = 1 \text{ rad}$

**Plný úhel:**

$\Delta s = 2\pi r$  pak  $\Delta\varphi = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$



# OPAKOVÁNÍ – POHYB POKRUŽNICI

## Perioda

T – doba jednoho oběhu

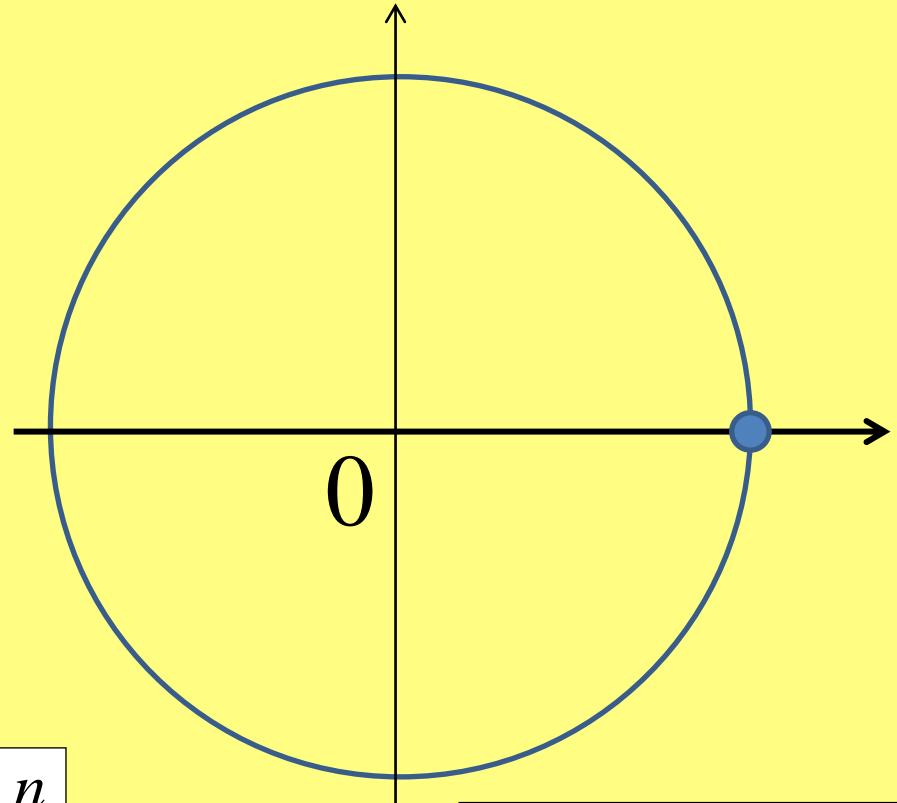
## Frekvence

f – počet oběhů  
za jednotku času  
(sekundu)

$$f = \frac{1}{T} \rightarrow [f] = \text{Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} \rightarrow [T] = \text{s}$$

$$f = \frac{n}{t}$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

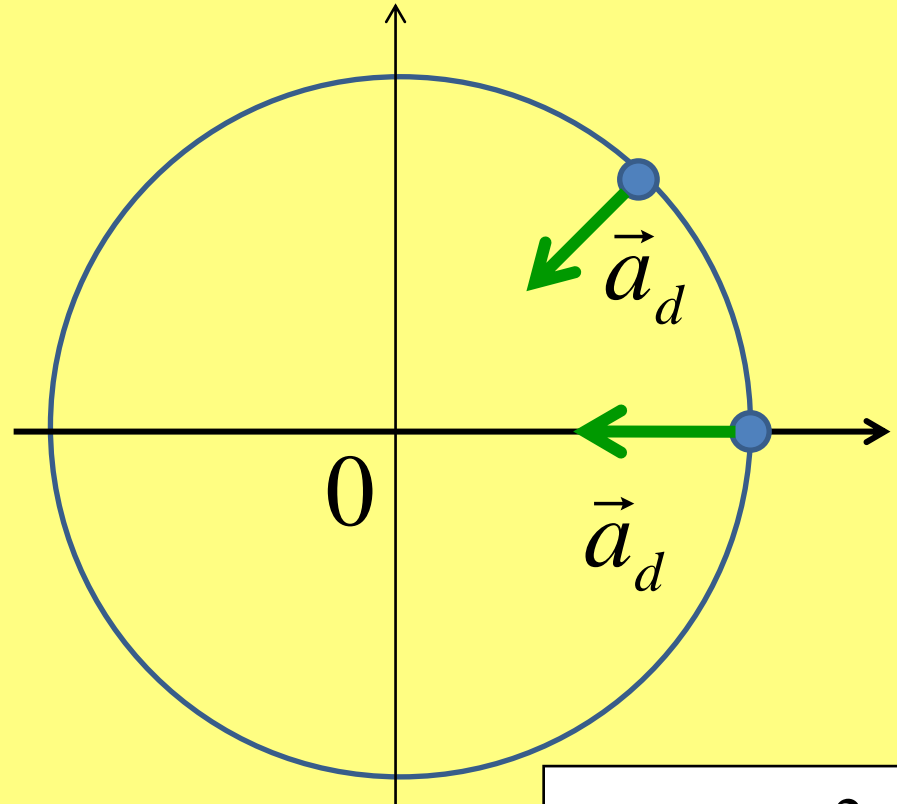
# OPAKOVÁNÍ – POHYB POKRUŽNICI

Vztah mezi úhlovou rychlostí a rychlostí:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$v = r \cdot \omega$$

$$v = r \frac{2\pi}{T} = r \cdot 2\pi \cdot f$$



**dostředivé zrychlení:**  
směr – do středu kružnice  
velikost – konstantní

$$a_d = \omega^2 r$$

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$



# 1. 1. KMITAVÝ POHYB

## Mechanický oscilátor

zařízení, které volně – bez vnějšího působení kmitá.

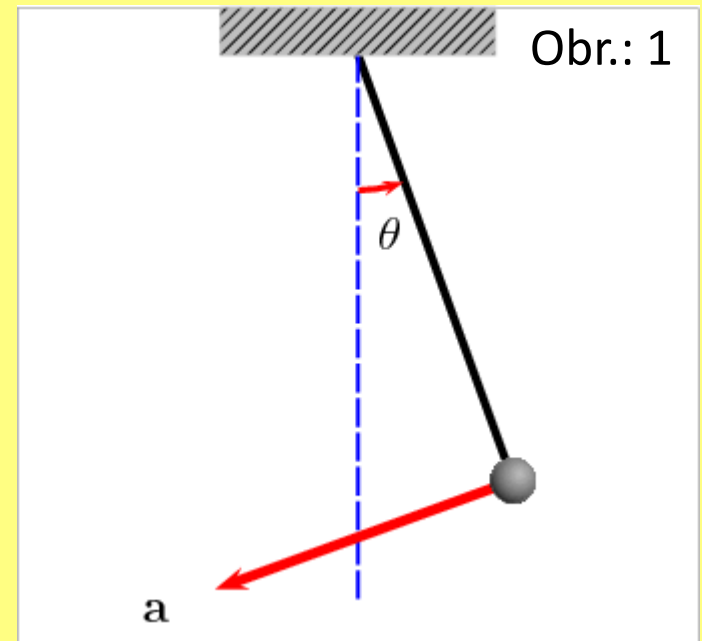
Existují dva „speciální“ typy mechanických oscilátorů:

### 1. těleso zavěšené na pružině

kmitání je způsobené silou pružnosti

### 2. kyvadlo

kmitání je způsobené tíhovou silou



[ANIMACE KMITÁNÍ](#)

# 1. 1. KMITAVÝ POHYB

## Rovnovážná poloha (RP)

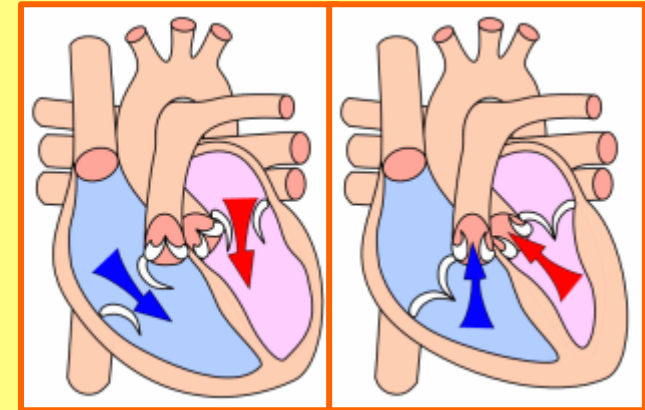
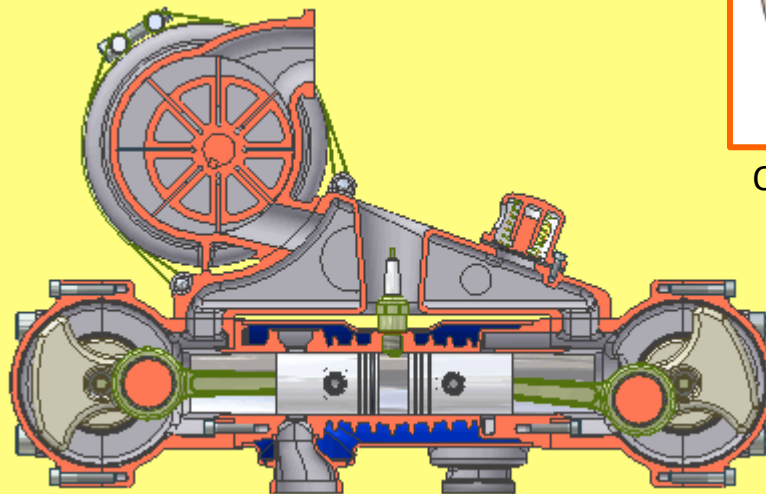
bod, ve kterém jsou síly působící na oscilátor v **rovnováze**.

## Periodický kmitavý pohyb

je pohyb, při kterém těleso pravidelně prochází RP.

Př.

- pružina
- kyvadlo
- srdce
- píst auta
- struna,...



Obr.: 3

Obr.: 4

Obr.: 5 - Průřez dvoudobým, přeplňovaným, zážehovým motorem typu boxer s protiběžnými písty a společným spalovacím prostorem

# 1. 1. KMITAVÝ POHYB

## Trajektorie

přímočará i křivočará.

Kmitavý pohyb je nerovnoměrný.

Za stejnou dobu urazí různou dráhu.

## Perioda $T$

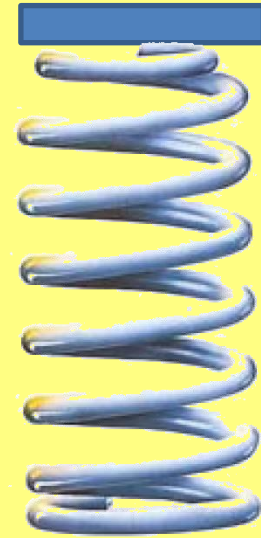
doba kmitu – oscilátor dospěje do stejné polohy.

## Frekvence $f$

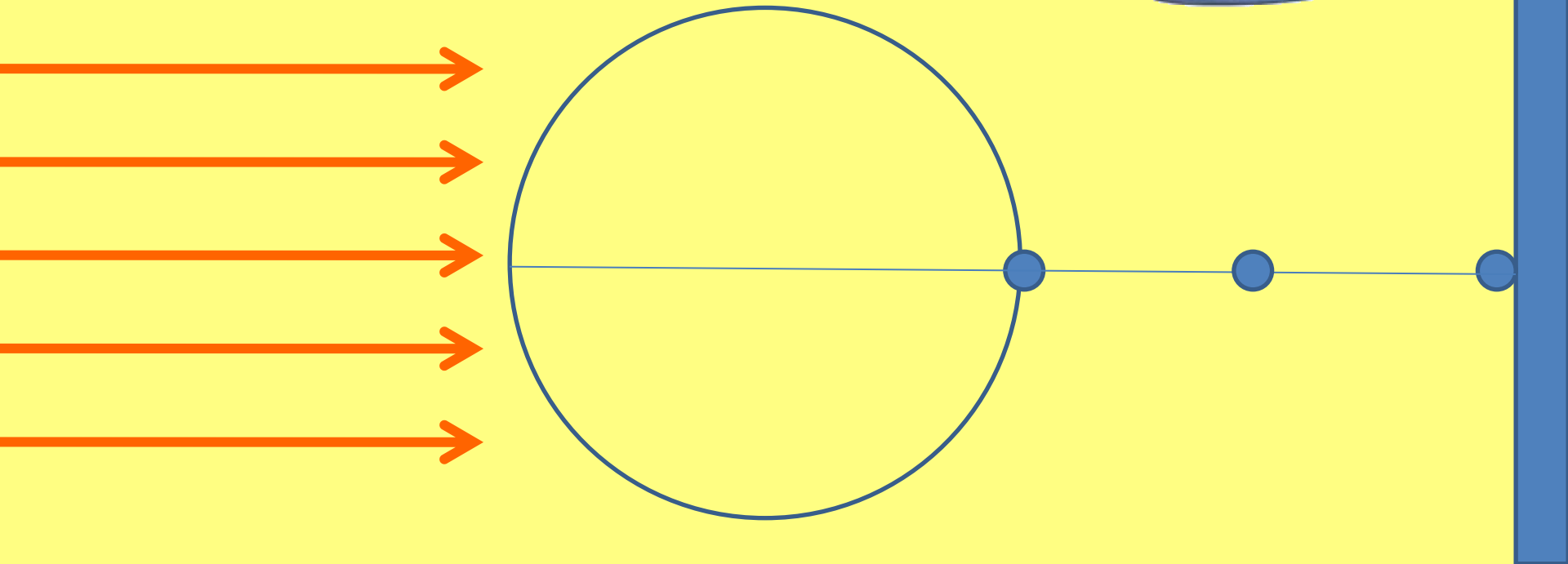
kmitočet – počet kmitů za sekundu.

# 1. 2. HARMONICKÝ POHYB

Srovnání kmitavého pohybu  
a pohybu rovnoměrného po kružnici.



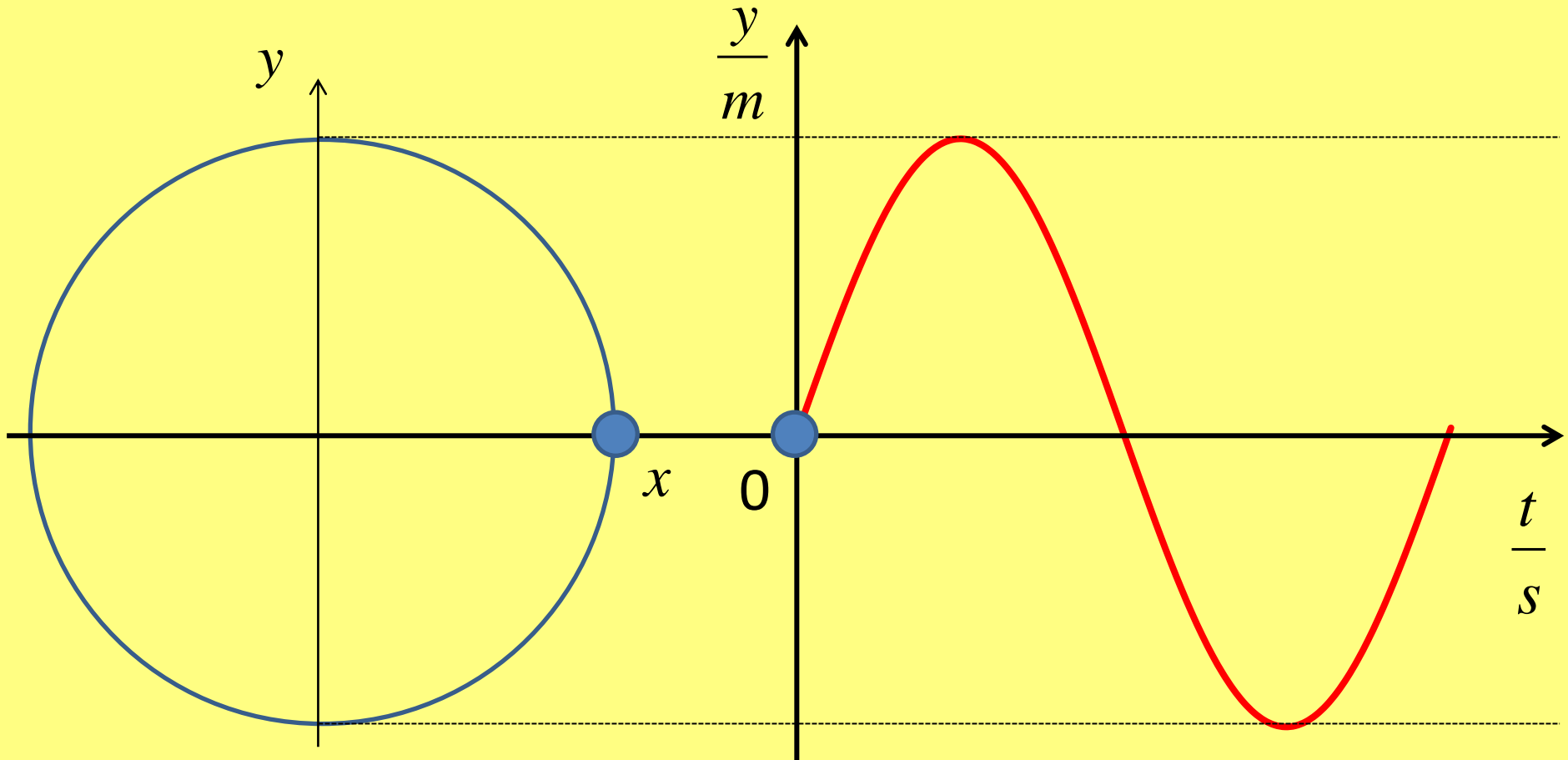
Obr.: 2



# Odvození okamžité výchylky

**časový diagram - závislost okamžité výchylky na čase**  
(vyjádření okamžité polohy těžiště jako funkce času)

V čase  $t = 0$  je těleso v rovnovážné poloze.



# Odvození okamžité výchylky

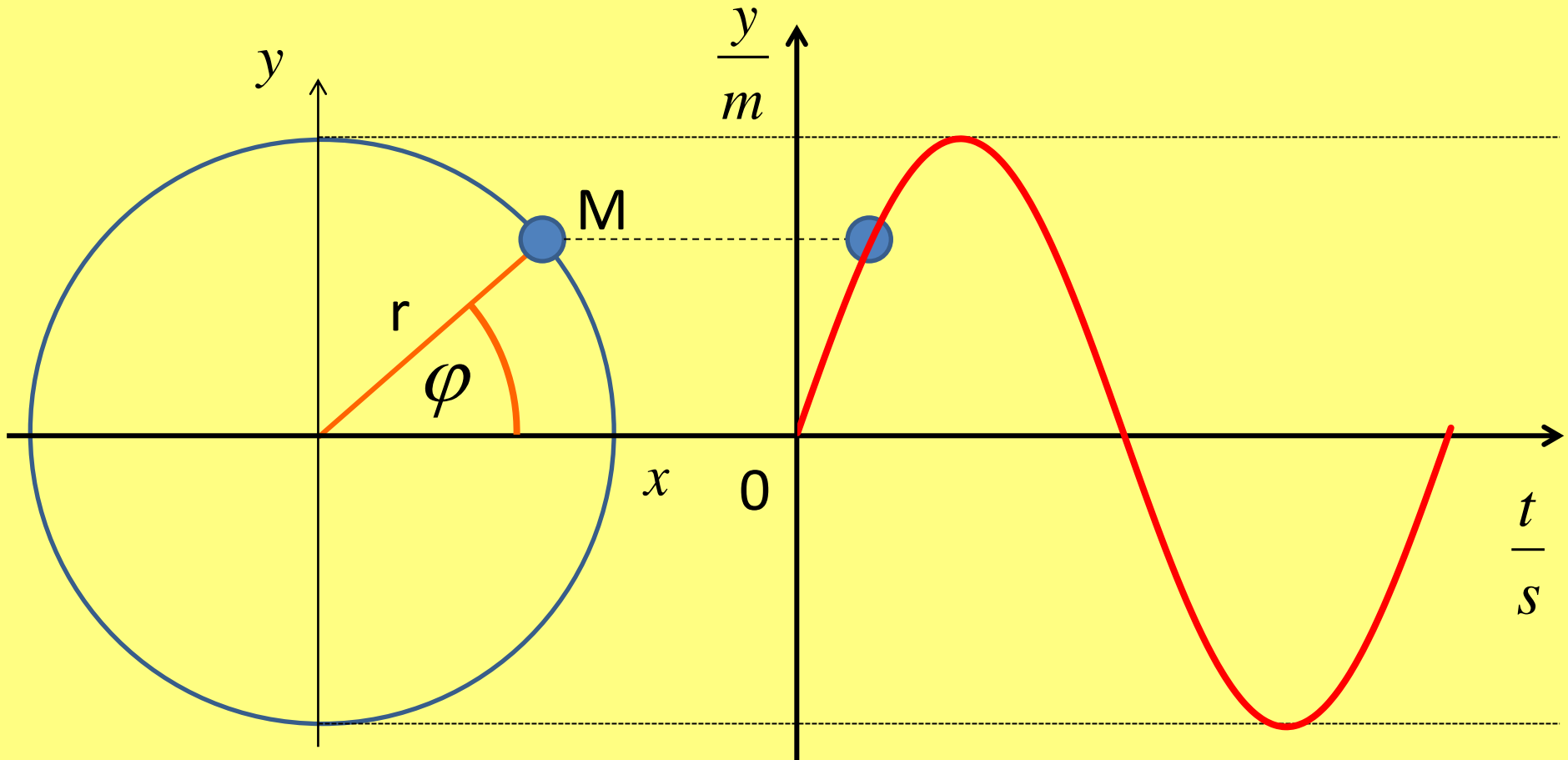
$r$  – průvodič

$\varphi$  – fáze kmitavého pohybu (úhel, který svírá průvodič s osou  $x$ )

$\omega$  – úhlová rychlost bodu  $M$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\varphi = \omega \cdot t$$



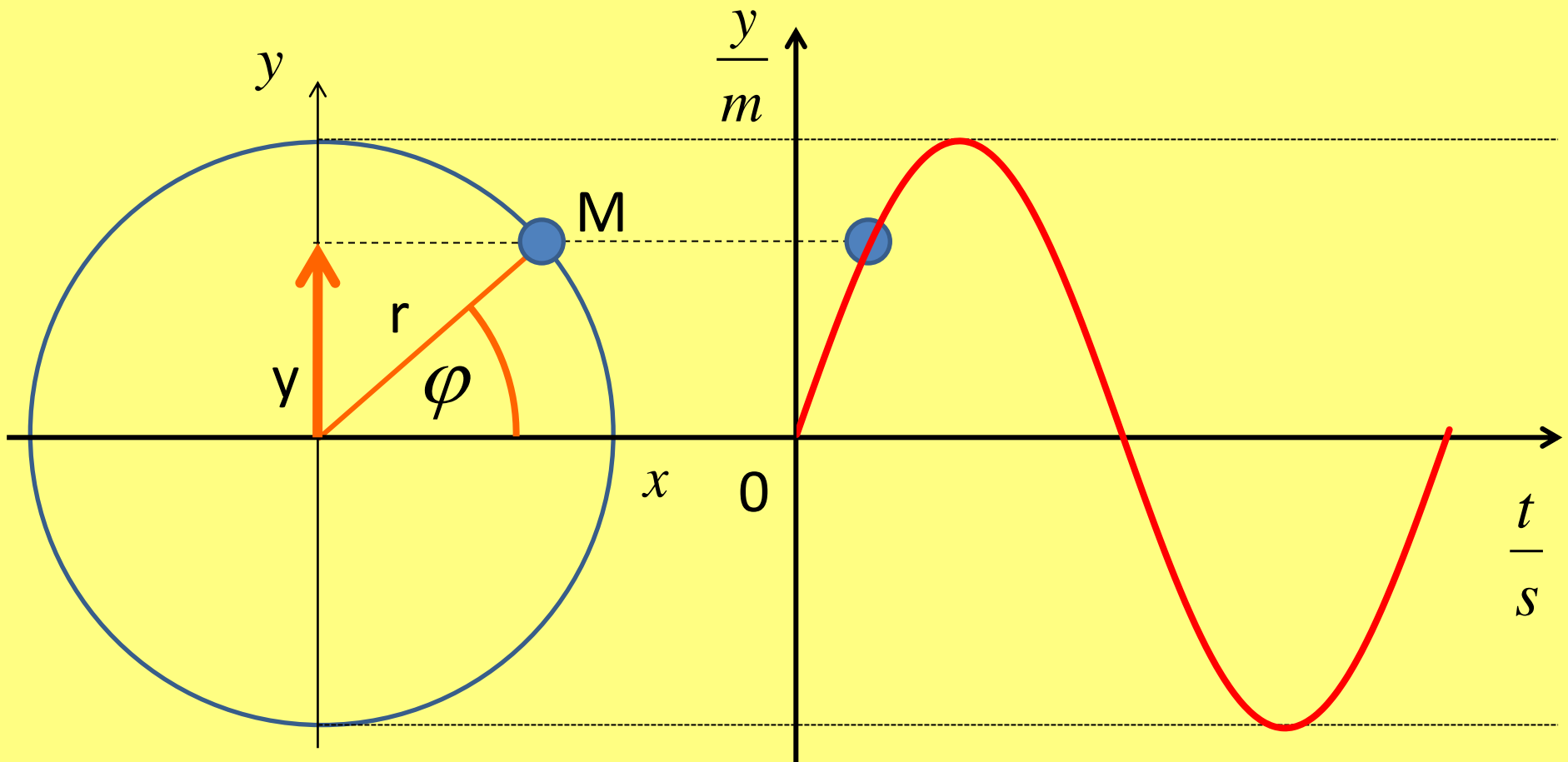
# Odvození okamžité výchylky

**okamžitá výchylka** – průmět průvodiče  $r$  do osy  $y$

$y$  – okamžitá výchylka z rovnovážné polohy

$y_m$  – amplituda výchylky (maximální výchylka)

$$y_m = r$$



# Odvození okamžité výchylky

$$\sin \varphi = \frac{y}{r}$$

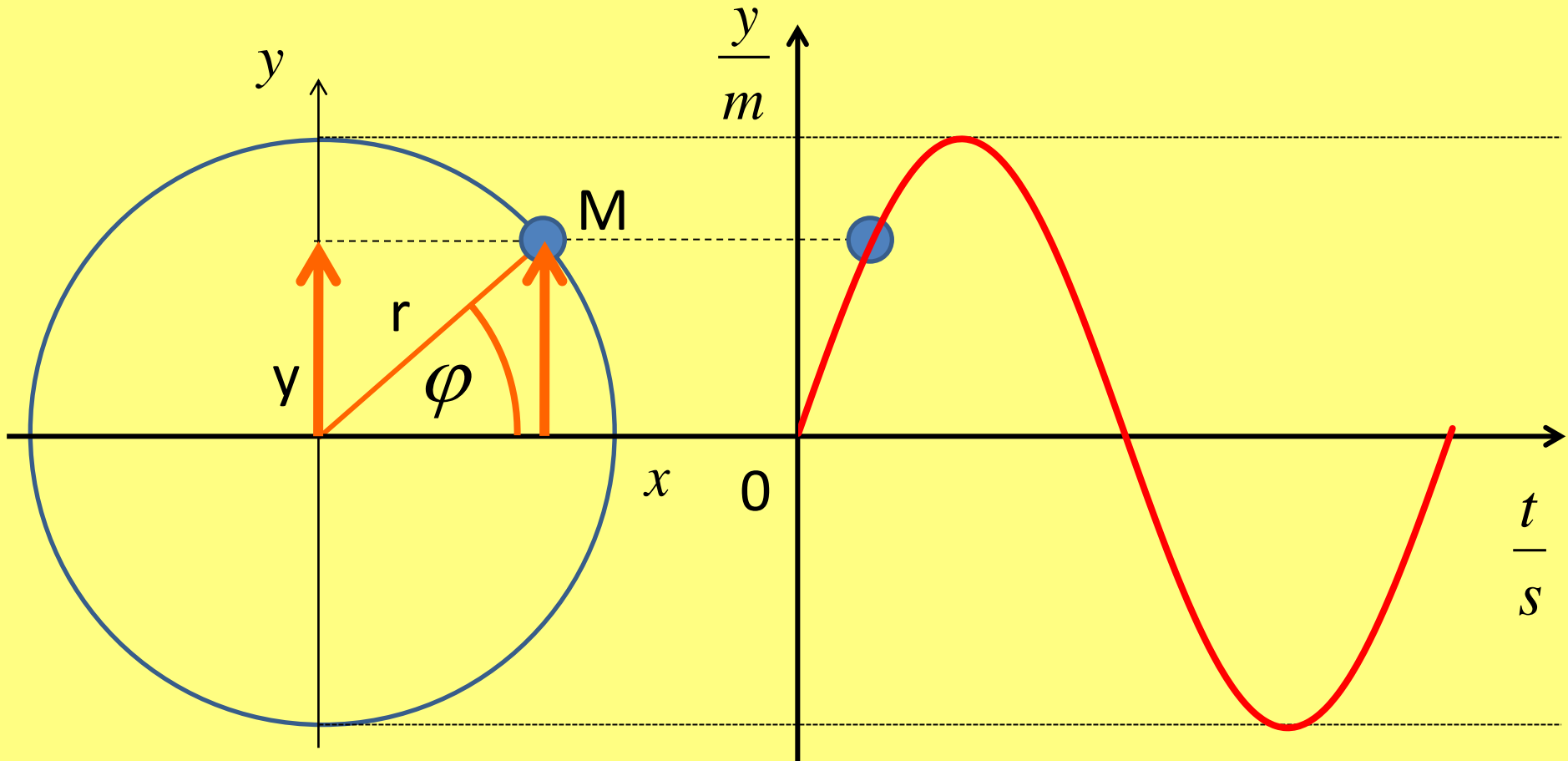
$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$y_m = r$$

$$y = y_m \cdot \sin \omega t$$

$$\varphi = \omega \cdot t$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$



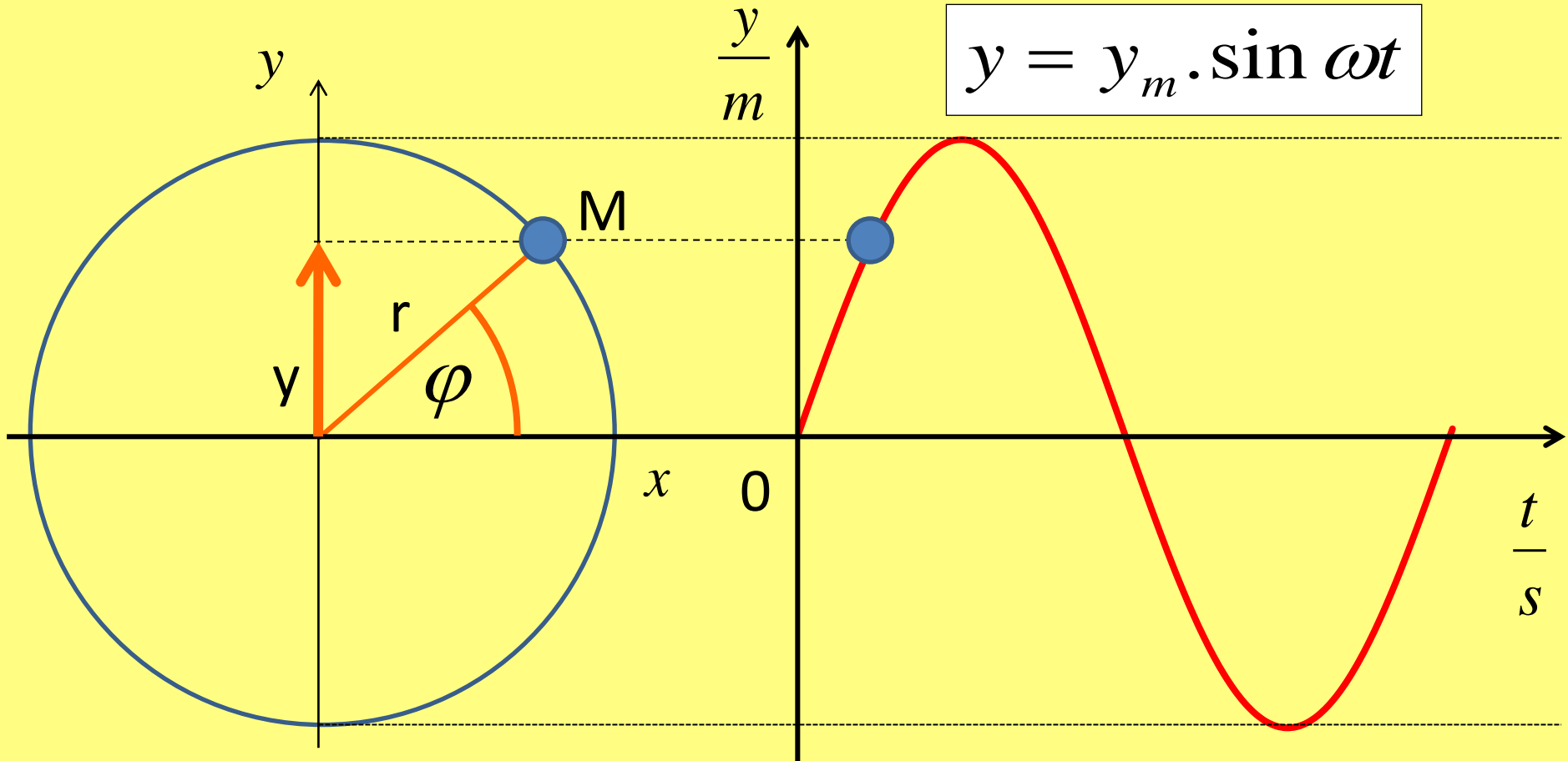


# Odvození okamžité výchylky

Výchylka se s časem mění a vzhledem k rovnovážné poloze nabývá kladných a záporných hodnot.

## Harmonický kmitavý pohyb

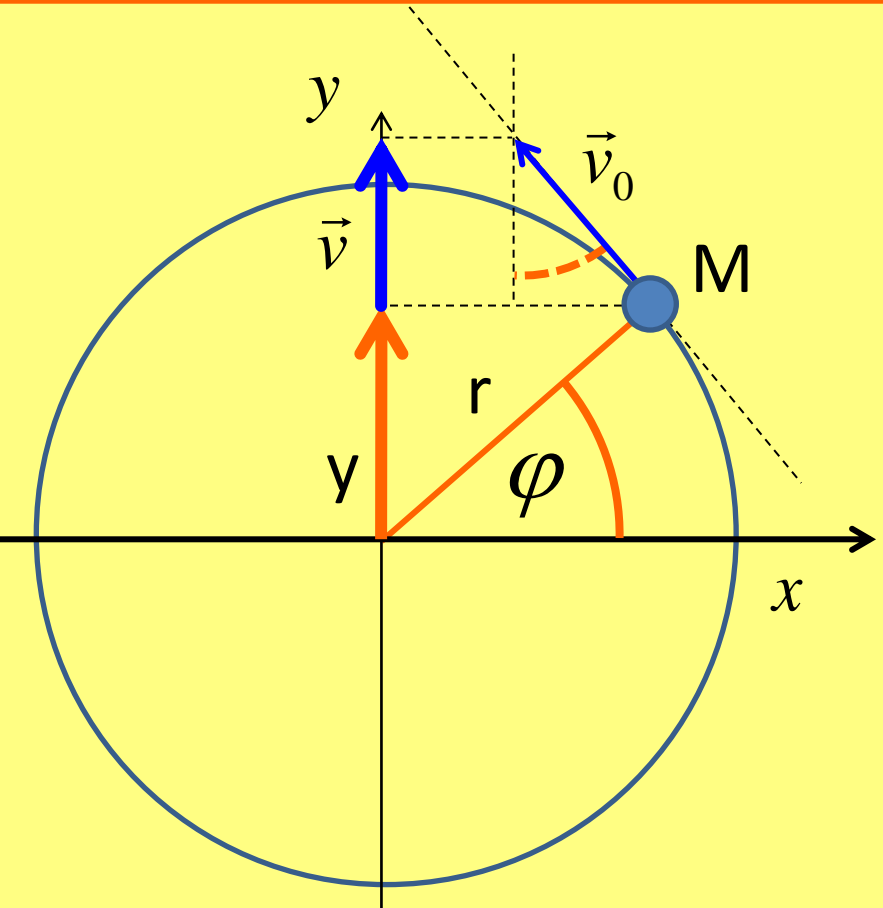
je pohyb, jehož časovým diagramem je sinusoida.



# 1.3. RYCHLOST A ZRYCHLENÍ KMITAVÉHO POHYBU

$\mathbf{v}_0$  – vektor rychlosti rovnoměrného pohybu bodu M po kružnici (směr tečny)

$\mathbf{v}$  – rychlost kmitavého pohybu – průmět  $\mathbf{v}_0$  do osy y



$$\cos \varphi = \frac{v}{v_0}$$
$$v = v_0 \cos \omega t$$

$$v = \omega \cdot r \cos \omega t$$

$$v = \omega \cdot y_m \cos \omega t$$

$$v = v_m \cos \omega t$$

$$v_0 = \omega \cdot r$$

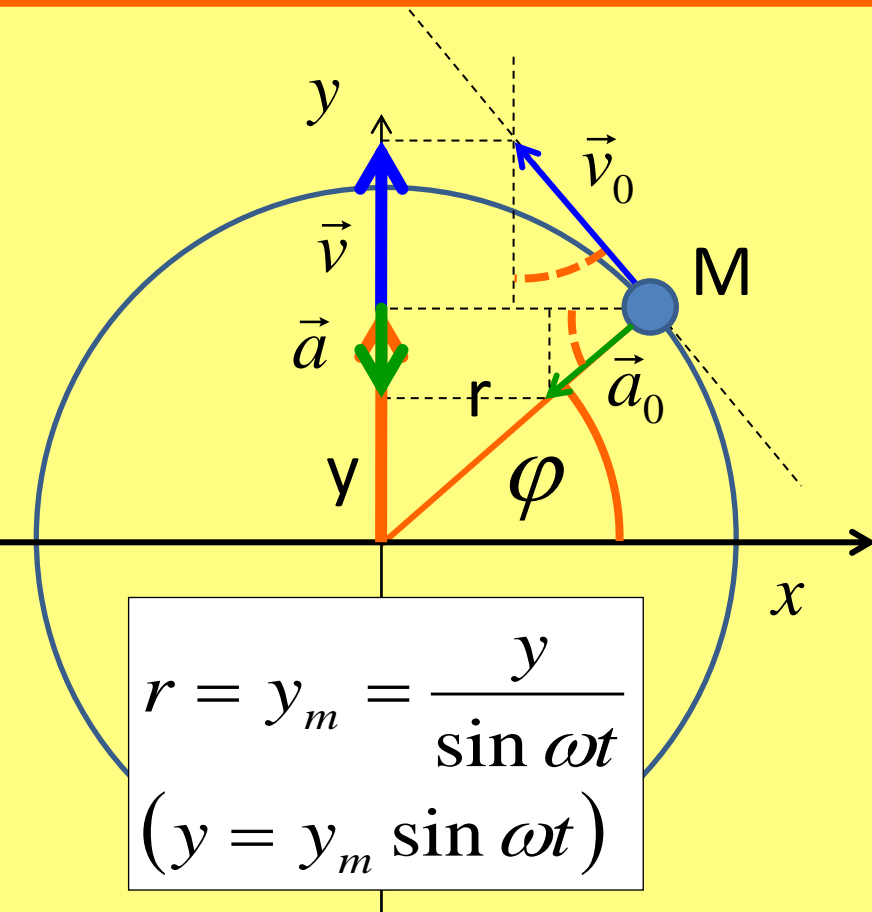
$$v_m = \omega \cdot y_m$$

amplituda rychlosti

# 1.3. RYCHLOST A ZRYCHLENÍ KMITAVÉHO POHYBU

$a_0$  – zrychlení bodu M (směřuje do středu kružnice)

$a$  – zrychlení kmitavého pohybu – průmět  $a_0$  do osy  $y$



$$\sin \omega t = \frac{a}{a_0}$$

$a$  má opačný směr než  $y$  (proto  $-$ )

$$a = -a_0 \sin \omega t$$

$$a_0 = \omega^2 r$$

$$a = -\omega^2 r \sin \omega t$$

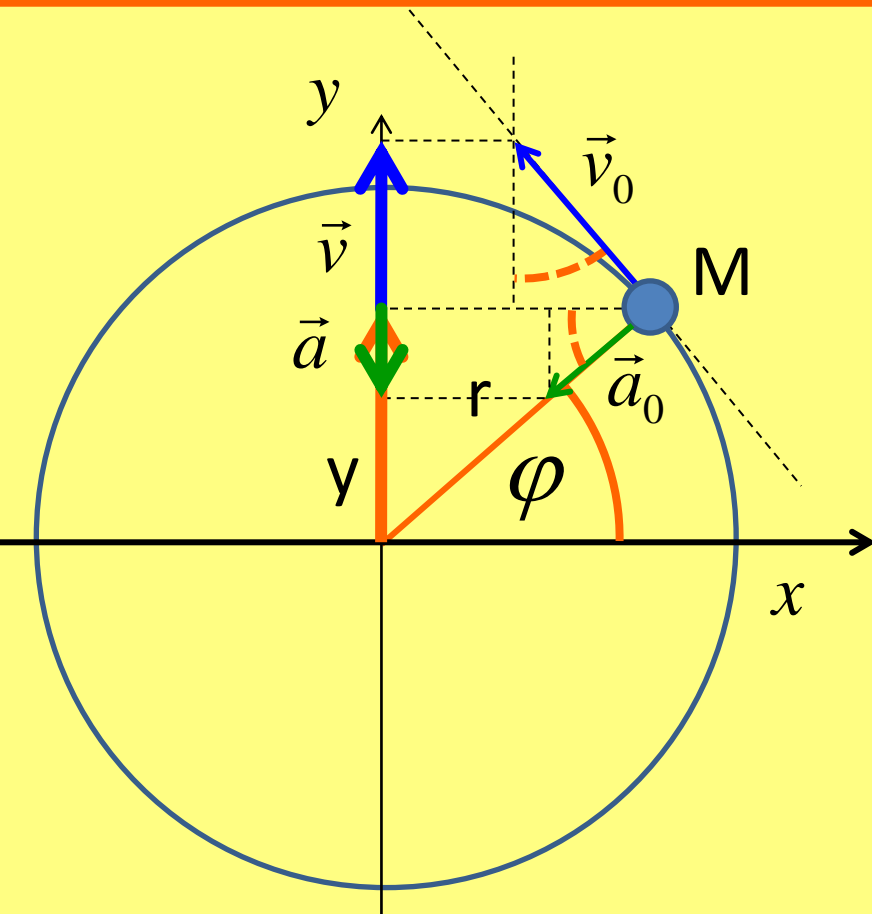
$$a = -\omega^2 \frac{y}{\sin \omega t} \sin \omega t$$

$$a = -\omega^2 y$$

# 1.3. RYCHLOST A ZRYCHLENÍ KMITAVÉHO POHYBU

$$a = -\omega^2 y$$

Zrychlení je přímo úměrné výchylce a v každém okamžiku má opačný směr.



$$y = y_m \sin \omega t$$

$$a = -\omega^2 y_m \sin \omega t$$

$$a_m = \omega^2 y_m \text{ amplituda zrychlení}$$

$$a = -a_m \sin \omega t$$

- z RP – zpomalený pohyb
- do RP – zrychlený pohyb

# 1.3. RYCHLOST A ZRYCHLENÍ KMITAVÉHO POHYBU

$$y = y_m \sin \omega t$$

$$v = v_m \cos \omega t$$

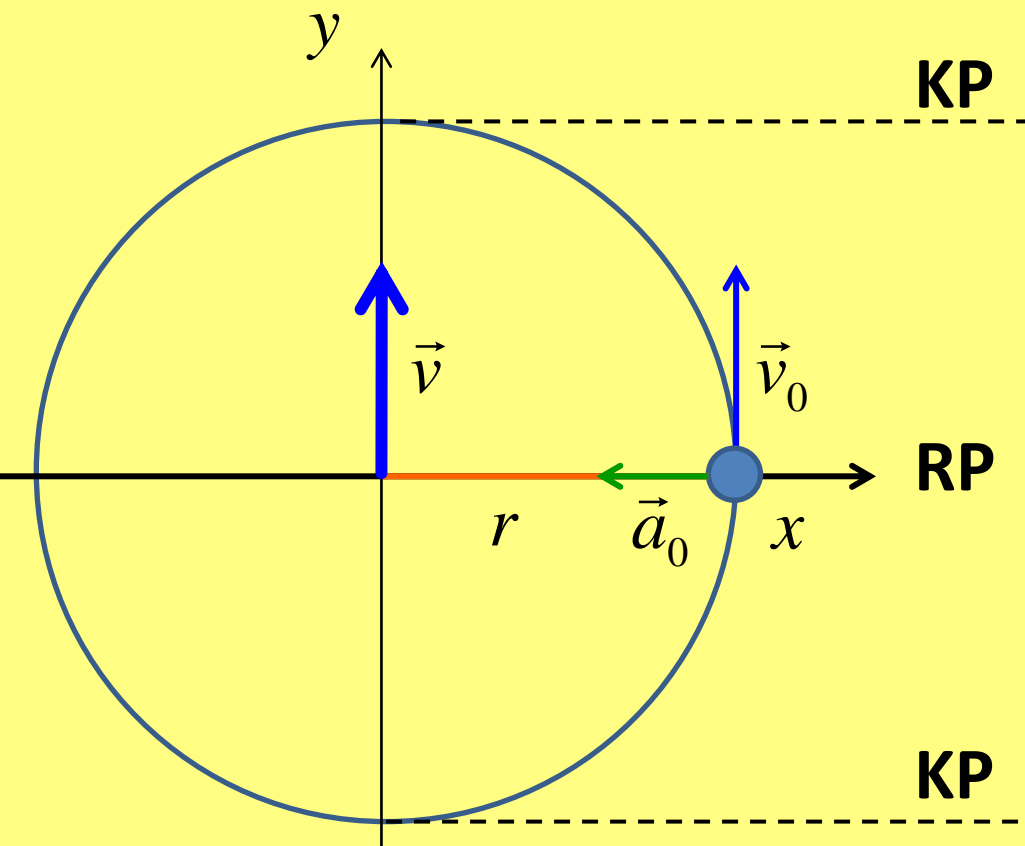
$$a = -a_m \sin \omega t$$

**V rovnovážné poloze:**

$$y = 0$$

$$v = v_m$$

$$a = 0$$



# 1.3. RYCHLOST A ZRYCHLENÍ KMITAVÉHO POHYBU

$$y = y_m \sin \omega t$$

$$v = v_m \cos \omega t$$

$$a = -a_m \sin \omega t$$

**V rovnovážné poloze:**

$$y = 0$$

$$v = v_m$$

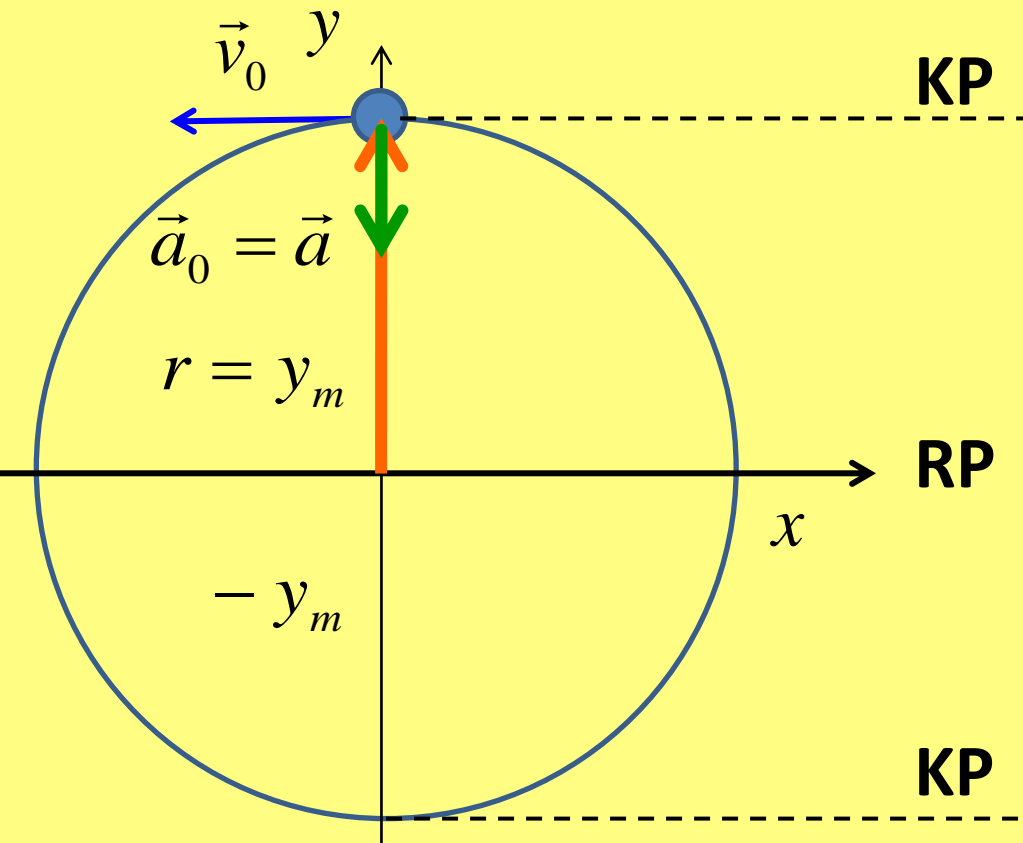
$$a = 0$$

**V krajní poloze:**

$$y = \pm y_m$$

$$v = 0$$

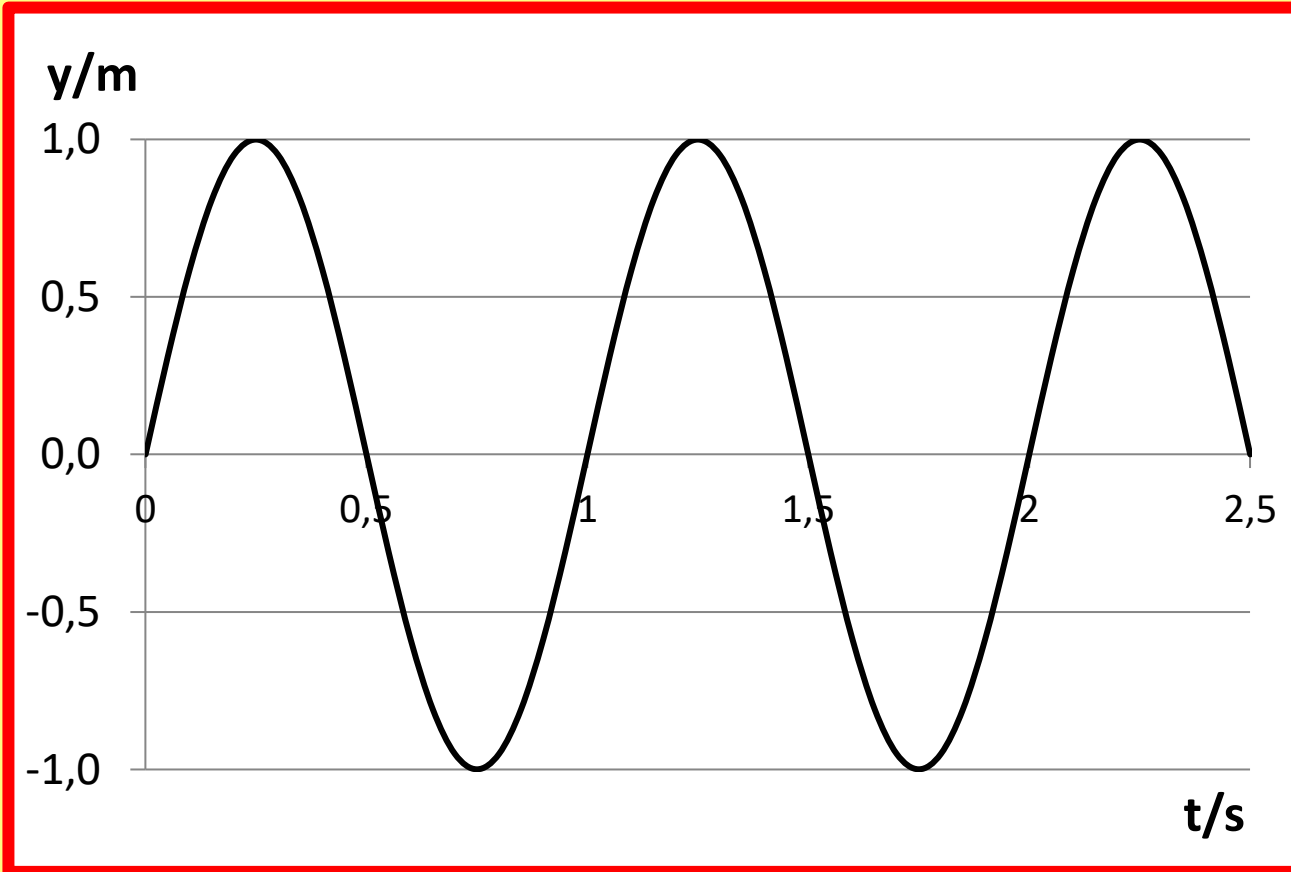
$$a = a_m$$



# 1.3. RYCHLOST A ZRYCHLENÍ KMITAVÉHO POHYBU

Časové diagramy kinematických veličin harmonického pohybu → výchylka

$$y = y_m \sin \omega t$$



$$y_m = 1m$$

$$T = 1s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

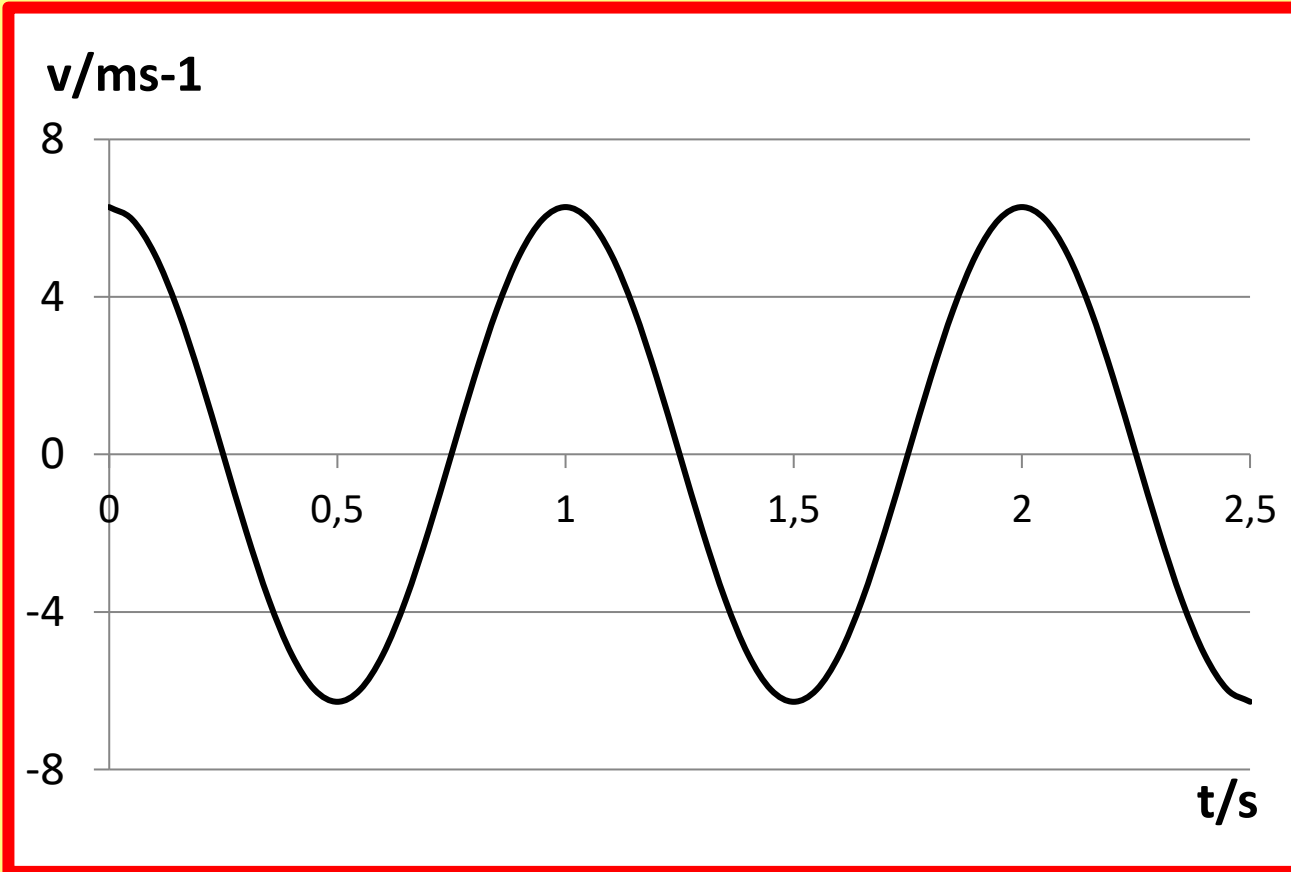
$$\omega = 2\pi s^{-1} = 6,3s^{-1}$$

$$\{y\} = \sin 2\pi \{t\}$$

# 1.3. RYCHLOST A ZRYCHLENÍ KMITAVÉHO POHYBU

Časové diagramy kinematických veličin harmonického pohybu → rychlost

$$v = v_m \cos \omega t$$



$$\{v\} = 6,3 \cos 2\pi \{t\}$$

$$y_m = 1m$$

$$T = 1s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi s^{-1} = 6,3s^{-1}$$

$$v_m = \omega \cdot y_m$$

$$v_m = 6,3ms^{-1}$$

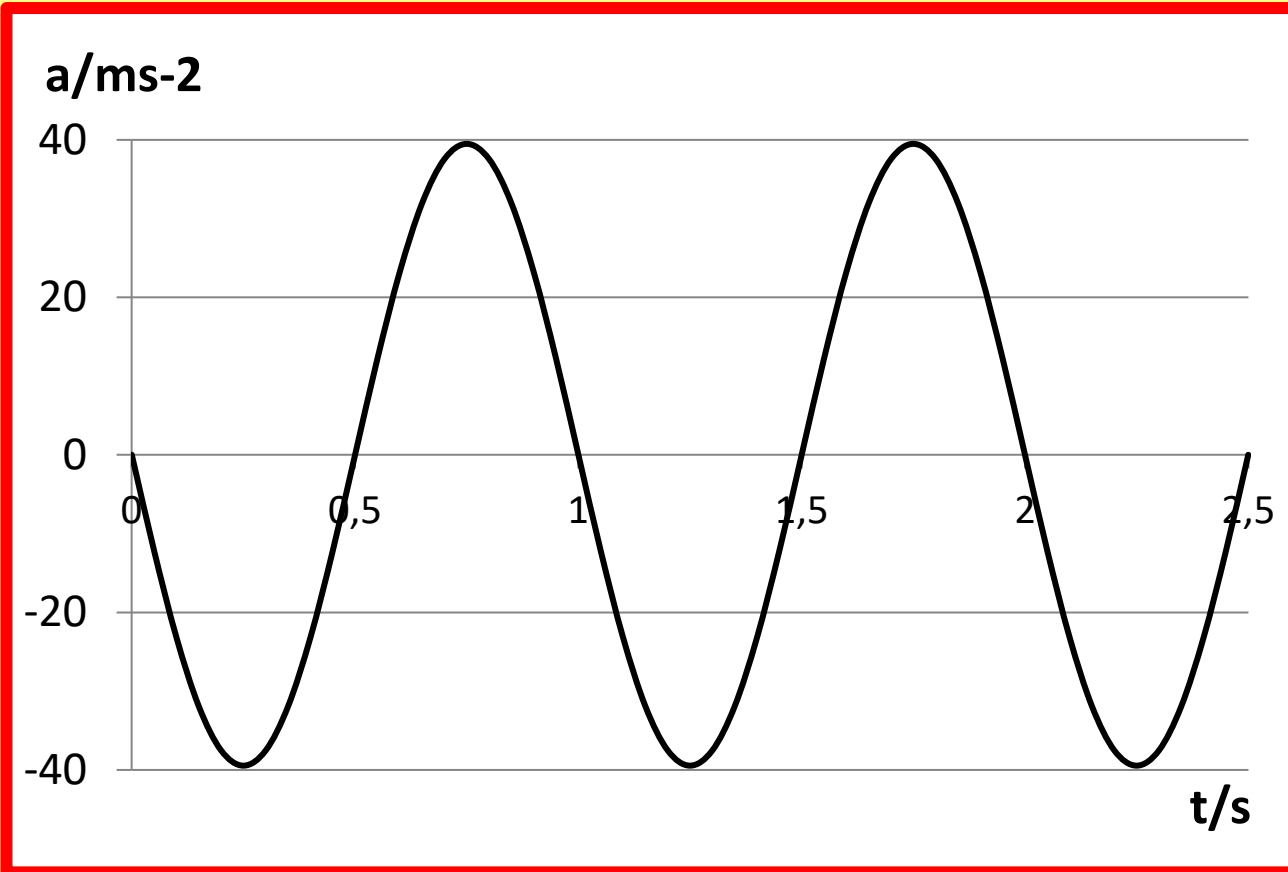


# 1.3. RYCHLOST A ZRYCHLENÍ KMITAVÉHO POHYBU

Časové diagramy kinematických veličin

harmonického pohybu → zrychlení

$$a = -a_m \sin \omega t$$



$$y_m = 1\text{m}$$

$$T = 1\text{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi\text{s}^{-1} = 6,3\text{s}^{-1}$$

$$a_m = \omega^2 \cdot y_m$$

$$a_m = 39,5\text{ms}^{-2}$$

$$\{a\} = -39,5 \sin 2\pi\{t\}$$

# 1.3. RYCHLOST A ZRYCHLENÍ KMITAVÉHO POHYBU

t/s	y/m	v/ms <sup>-1</sup>	a/ms <sup>-2</sup>
0	0,0	6,3	0,0
0,05	0,3	6,0	-12,2
0,1	0,6	5,1	-23,2
0,15	0,8	3,7	-31,9
0,2	1,0	1,9	-37,5
0,25	1,0	0,0	-39,5
0,3	1,0	-1,9	-37,5
0,35	0,8	-3,7	-31,9
0,4	0,6	-5,1	-23,2
0,45	0,3	-6,0	-12,2
0,5	0,0	-6,3	0,0
0,55	-0,3	-6,0	12,2
0,6	-0,6	-5,1	23,2
0,65	-0,8	-3,7	31,9
0,7	-1,0	-1,9	37,5
0,75	-1,0	0,0	39,5
0,8	-1,0	1,9	37,5
0,85	-0,8	3,7	31,9
0,9	-0,6	5,1	23,2
0,95	-0,3	6,0	12,2
1	0,0	6,3	0,0

$y_m/m$	1
T/s	1
$\omega/s^{-1}$	6,3
$v_m/ms^{-1}$	6,3
$a_m/ms^{-2}$	39,5

$$\{y\} = \sin 2\pi \{t\}$$

$$\{v\} = 6,3 \cos 2\pi \{t\}$$

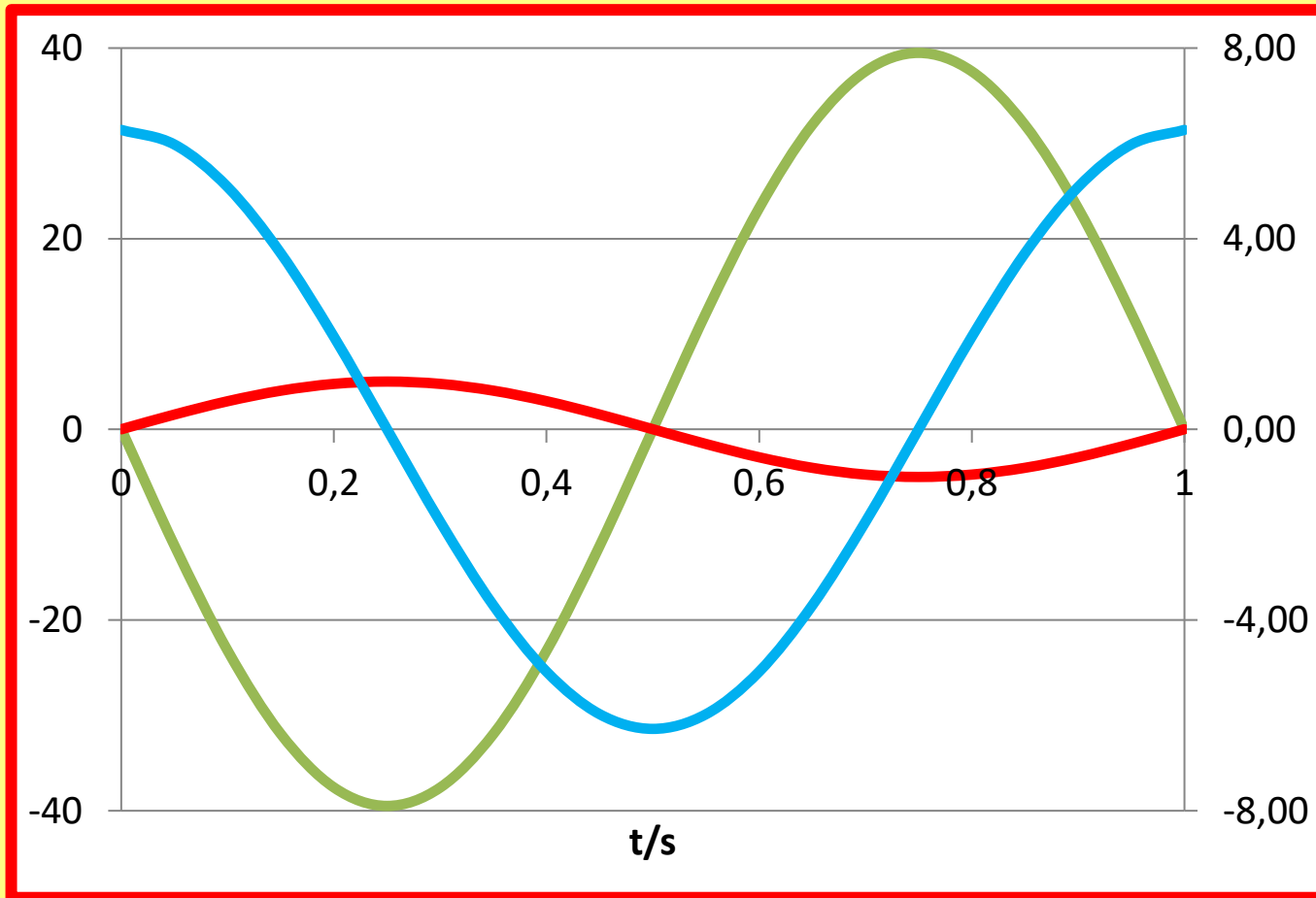
$$\{a\} = -39,5 \sin 2\pi \{t\}$$

# 1.3. RYCHLOST A ZRYCHLENÍ KMITAVÉHO POHYBU

## Časové diagramy

kinematických veličin harmonického pohybu →

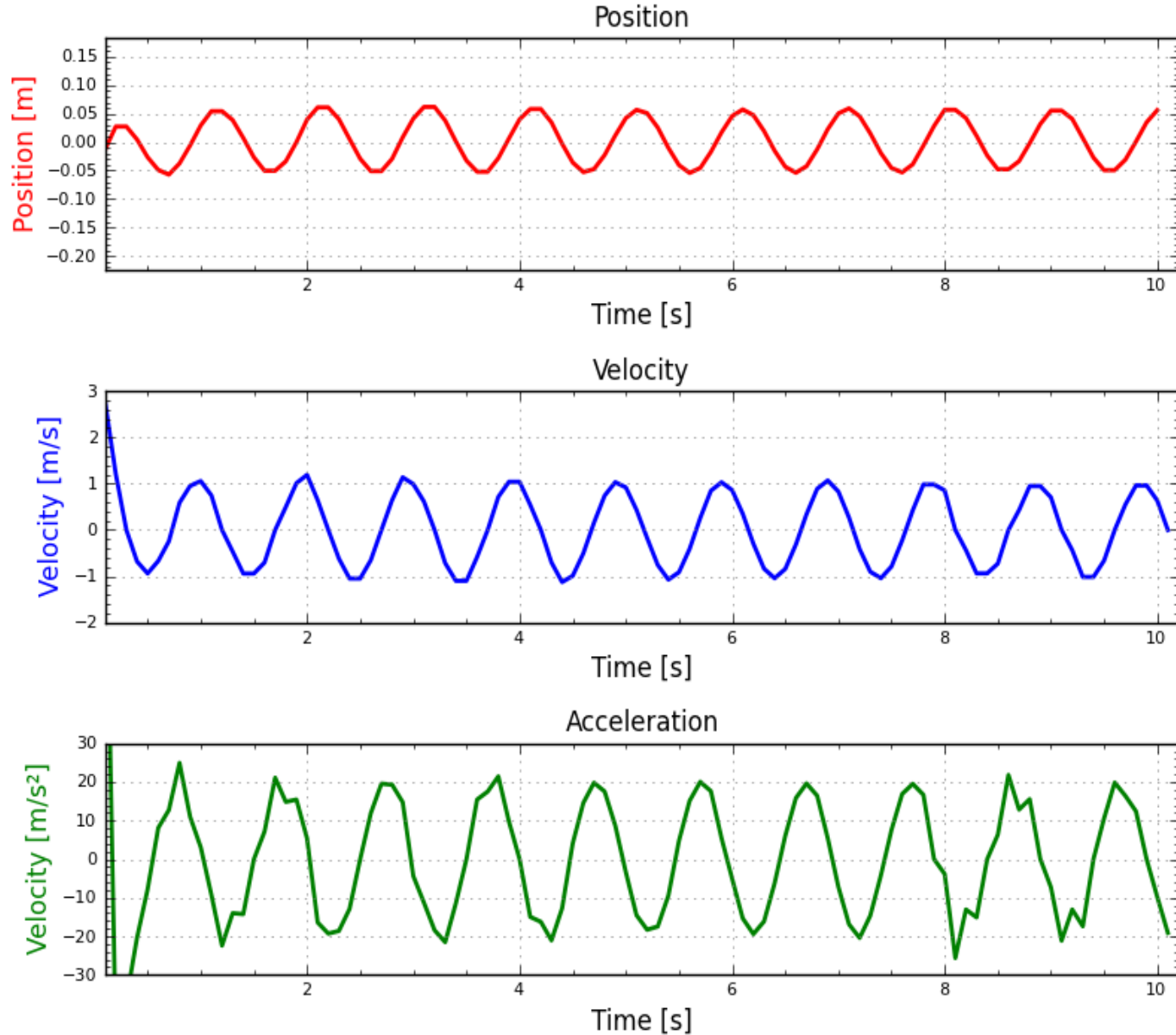
$$\frac{a}{ms^{-2}}$$



$$\frac{v}{ms^{-1}}$$

$$\frac{y}{m}$$

# 1.3. RYCHLOST A ZRYCHLENÍ KMITAVÉHO POHYBU



Časové  
diagramy  
kinematických  
veličin  
kmitavého  
pohybu tělesa  
zavěšeného  
na pružině.

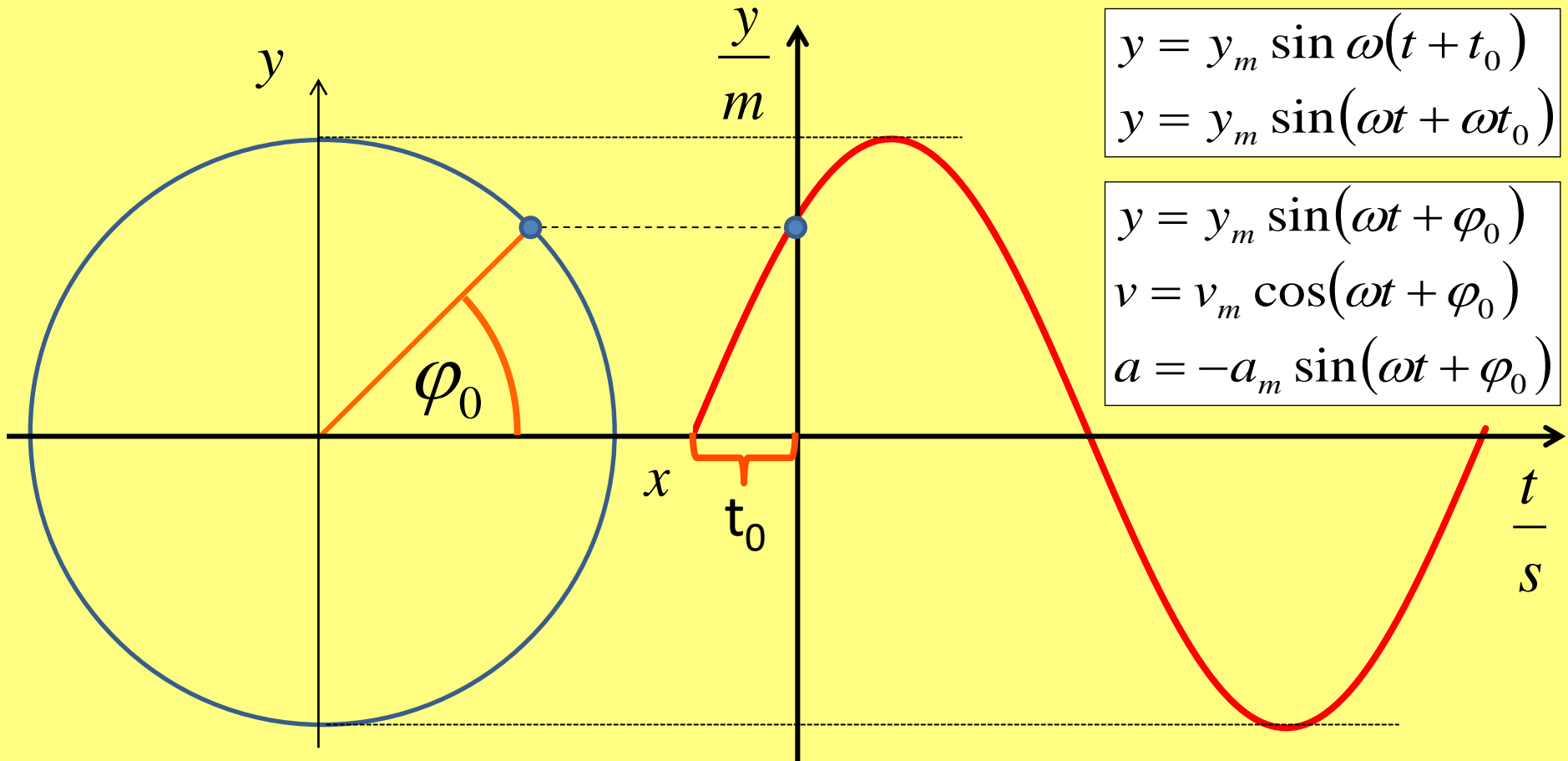
software  
EdLab  
čidlo - sonar

# 1.4. FÁZE KMITAVÉHO POHYBU

Jestliže těleso není v počátečním okamžiku v RP

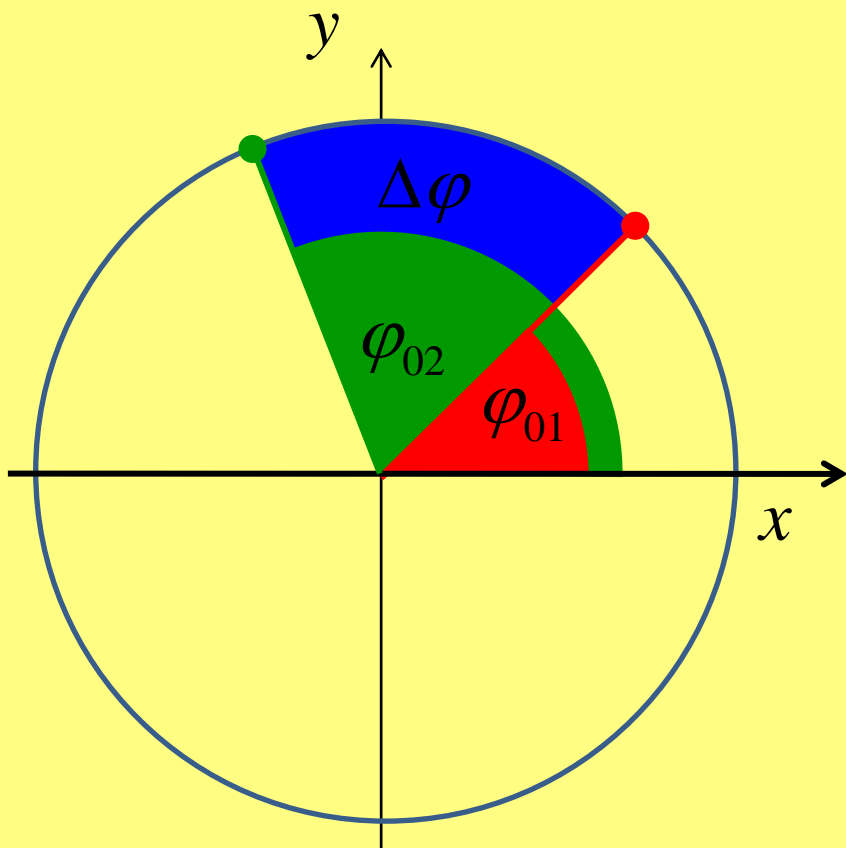
- od průchodu RP uplynul čas  $t_0$

- počáteční fáze kmitavého pohybu  $\varphi_0 = \omega t_0$



# 1.4. FÁZE KMITAVÉHO POHYBU

**Př:** Mějme dvě kmitání se stejnou frekvencí a různou počáteční fází  $\varphi_{01}$ ,  $\varphi_{02}$ .



$$y_1 = y_m \sin(\omega t + \varphi_{01})$$

$$y_2 = y_m \sin(\omega t + \varphi_{02})$$

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{02}) - (\omega t + \varphi_{01})$$

$$\Delta\varphi = \omega t + \varphi_{02} - \omega t - \varphi_{01}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

Fázový rozdíl  $\Delta\varphi$   
je určen rozdílem jejich počátečních fází.

# 1.4. FÁZE KMITAVÉHO POHYBU

## Fázový rozdíl kinematických veličin

$$y = y_m \sin \omega t$$

$$v = v_m \cos \omega t$$

$$a = -a_m \sin \omega t$$

$$y = y_m \sin \omega t$$

$$v = v_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = a_m \sin(\omega t + \pi)$$

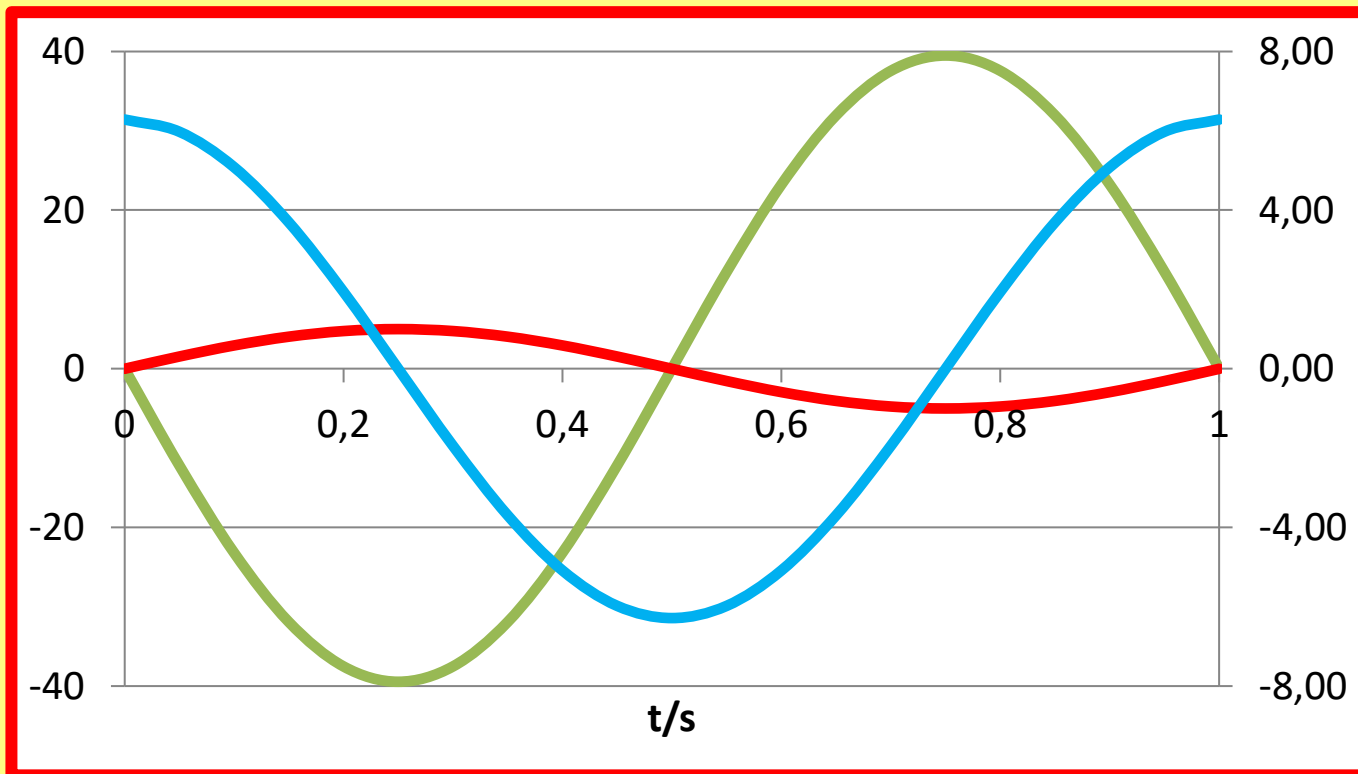
Fázový rozdíl mezi  
výhylkou a rychlostí

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Fázový rozdíl mezi  
výhylkou a zrychlením

$$\Delta\varphi = \pi$$

$$\frac{a}{\text{ms}^{-2}}$$



$$\frac{v}{\text{ms}^{-1}}$$

$$\frac{y}{\text{m}}$$

## 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

vzniká skládáním (superpozicí)  
několika kmitavých pohybů  
v pohyb jeden.

$$y_1 = y_m \sin(\omega t + \varphi_{01})$$
$$y_2 = y_m \sin(\omega t + \varphi_{02})$$
$$y_k = y_m \sin(\omega t + \varphi_{0k})$$

### Princip superpozice:

Výsledná poloha tělesa, které současně koná  
více pohybů je stejná, jako by je konalo po sobě.

### Výsledné kmitání lze získat dvěma způsoby:

1. sestrojováním okamžité výchylky bod po bodu
2. pomocí fázorů  
(výsledná amplituda závisí na fázovém rozdílu)



# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ – 1) bod po bodu

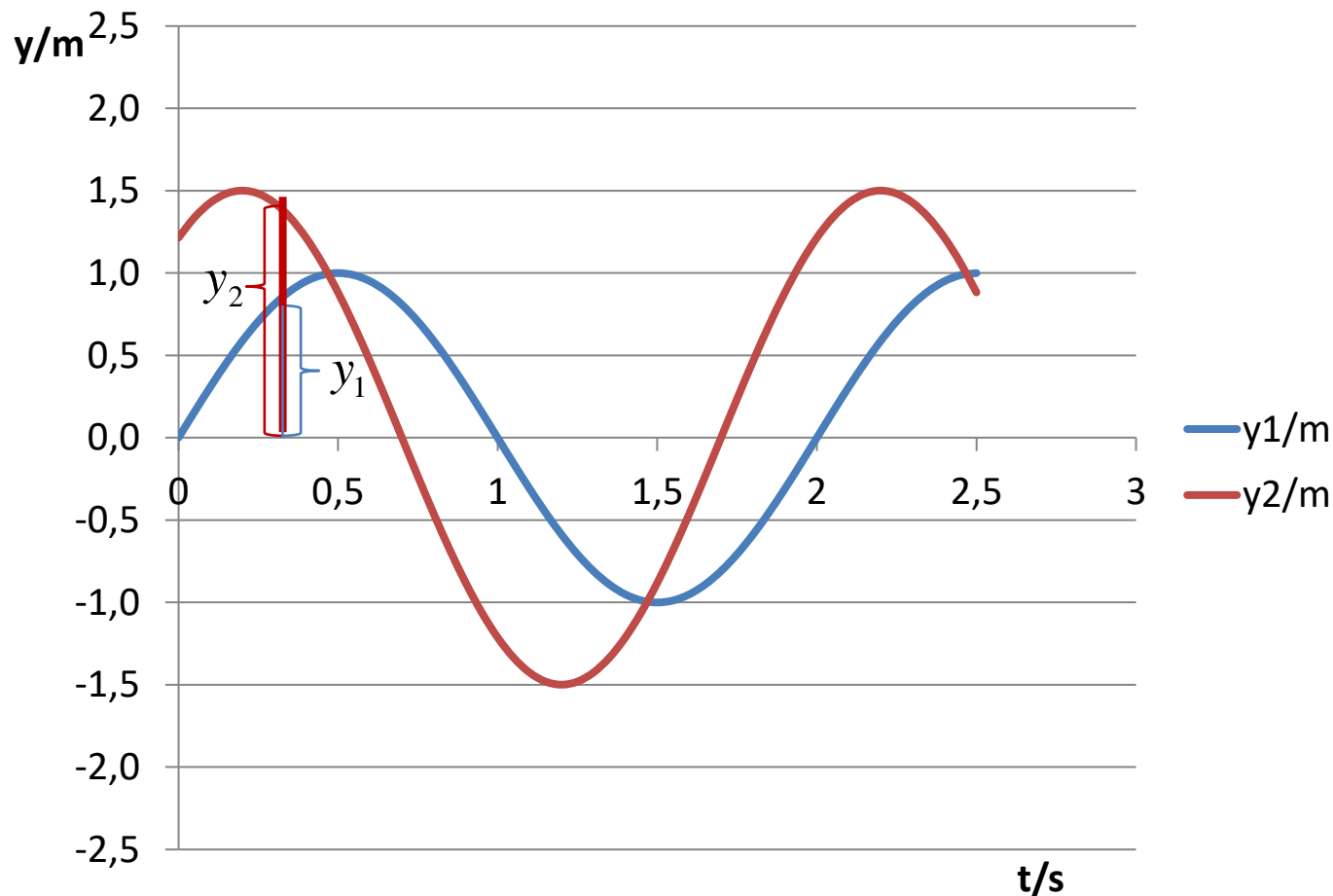
Př. Dvě kmitání  
popsána rovnicemi:

$$y_1 = y_{m1} \sin(\omega t + \varphi_{01})$$

$$y_2 = y_{m2} \sin(\omega t + \varphi_{02})$$

$$\{y_1\} = 1 \sin \pi \{t\}$$

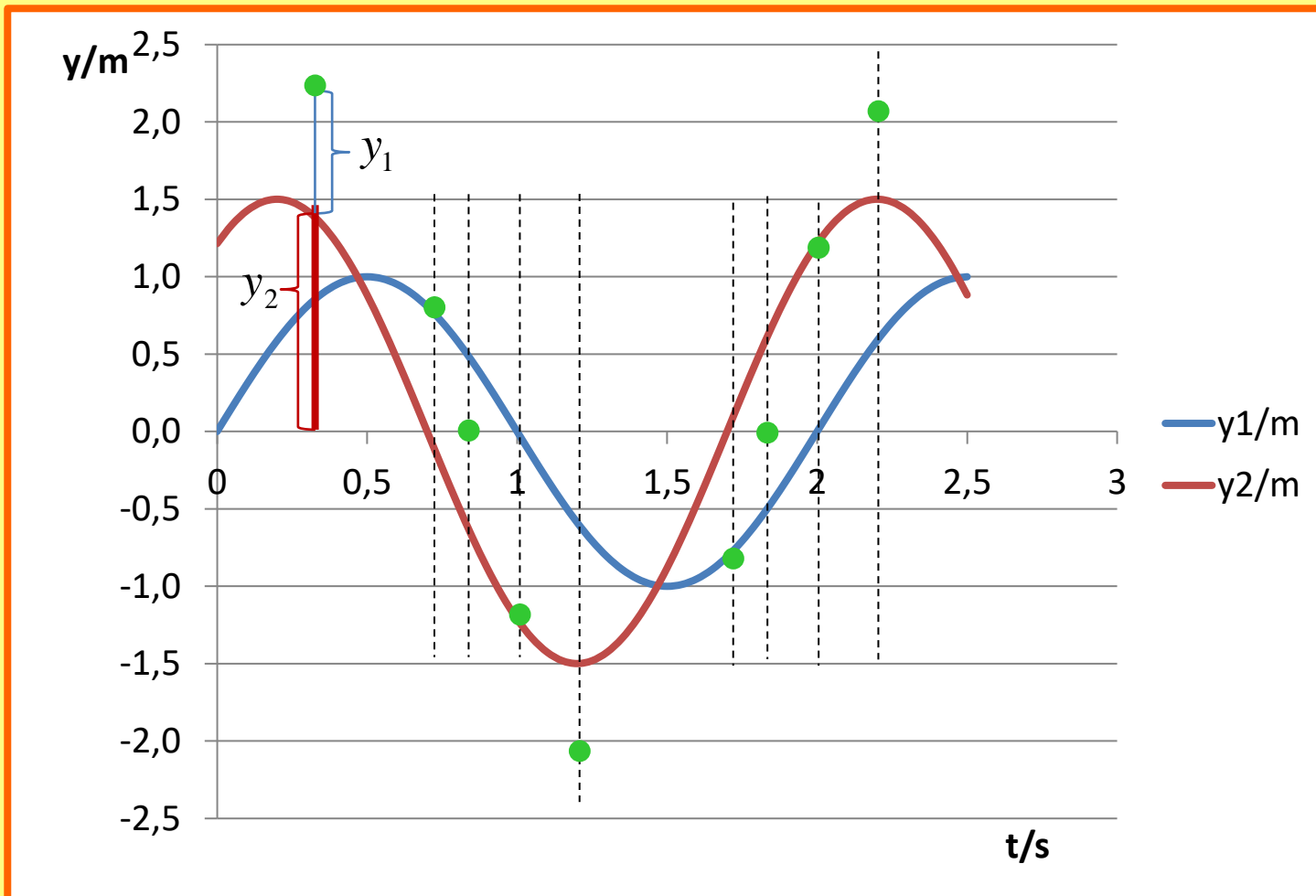
$$\{y_2\} = 1,5 \sin \pi (\{t\} + 0,3)$$



# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ – 1) bod po bodu

Okamžitá výchylka výsledného kmitání je rovna součtu okamžitých výchylek jednotlivých harmonických kmitání v daném čase.

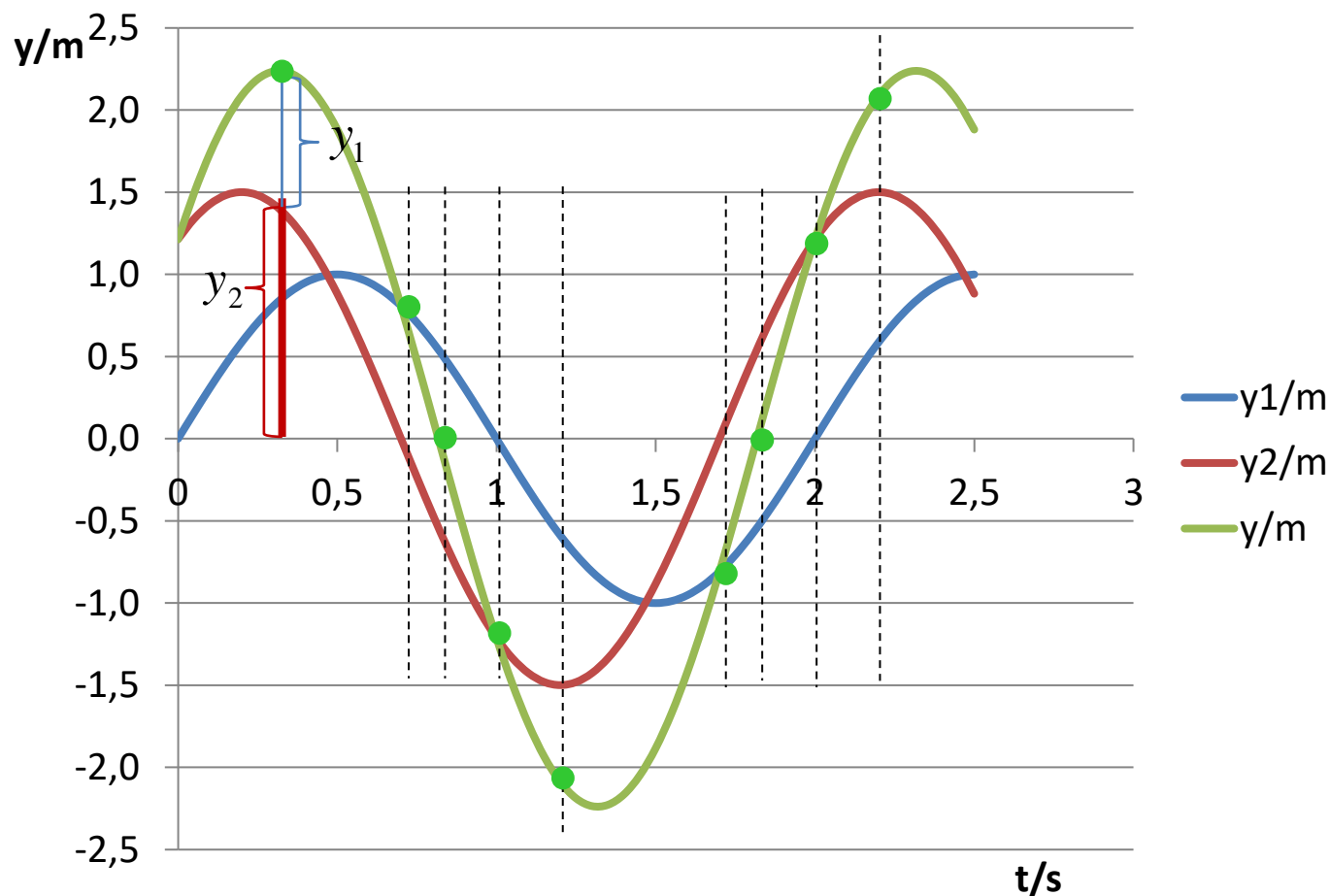
$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_k$$



# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ – 1) bod po bodu

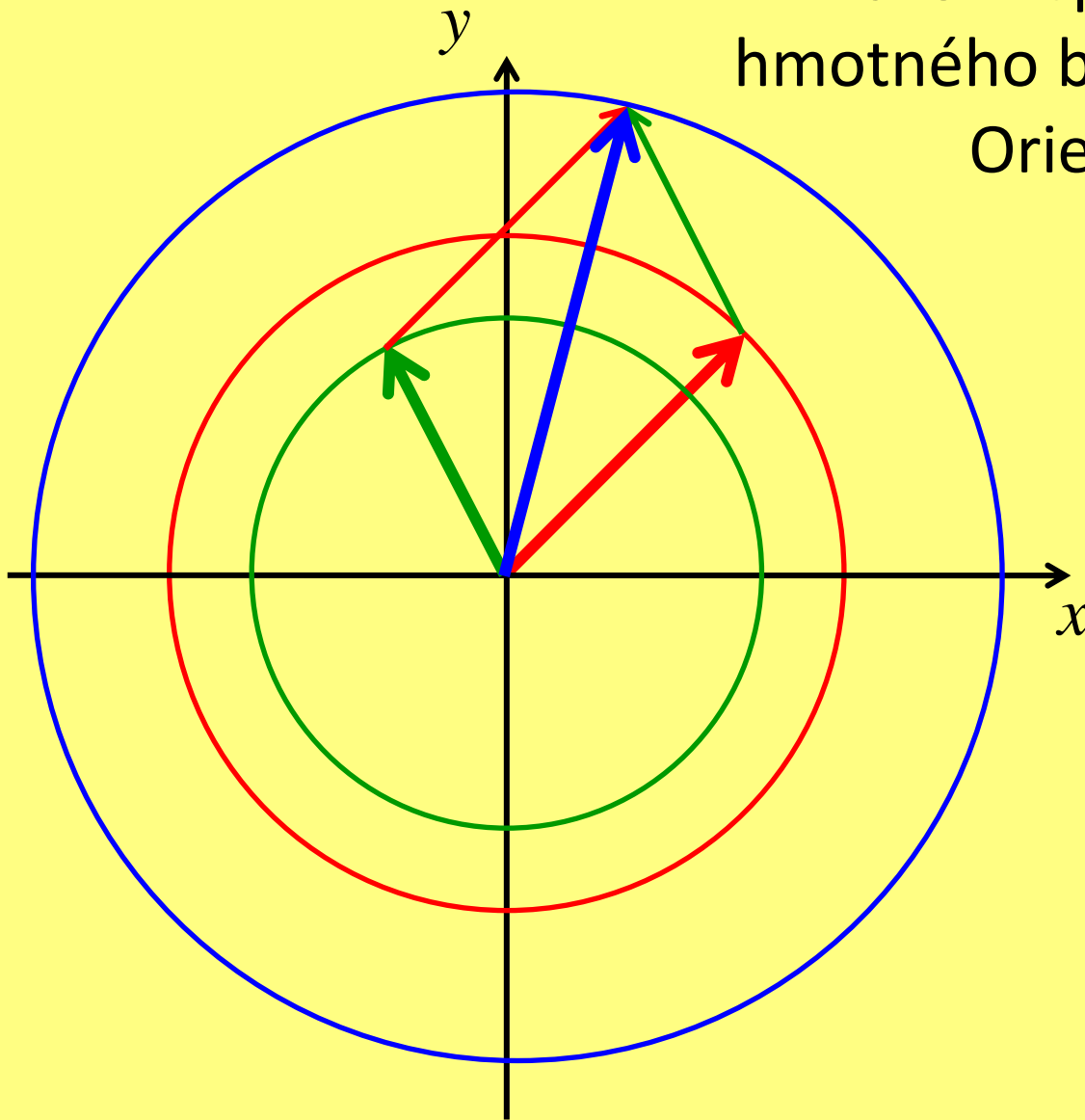
Okamžitá výchylka výsledného kmitání je rovna součtu okamžitých výchylek jednotlivých harmonických kmitání v daném čase.

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_k$$



## 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ – 2) pomocí fázorů

**Fázor** - spojnice otáčejícího se hmotného bodu se středem otáčení. Orientovaná úsečka.



Fázory jednotlivých dílčích kmitání se graficky sečtou stejně jako vektory.

Výsledný fázor odpovídá výslednému kmitavému pohybu.

## 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

$$\mathbf{A)} \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

Skládáním dvou harmonických kmitání stejného směru a stejné frekvence vzniká opět harmonické kmitání téže frekvence.

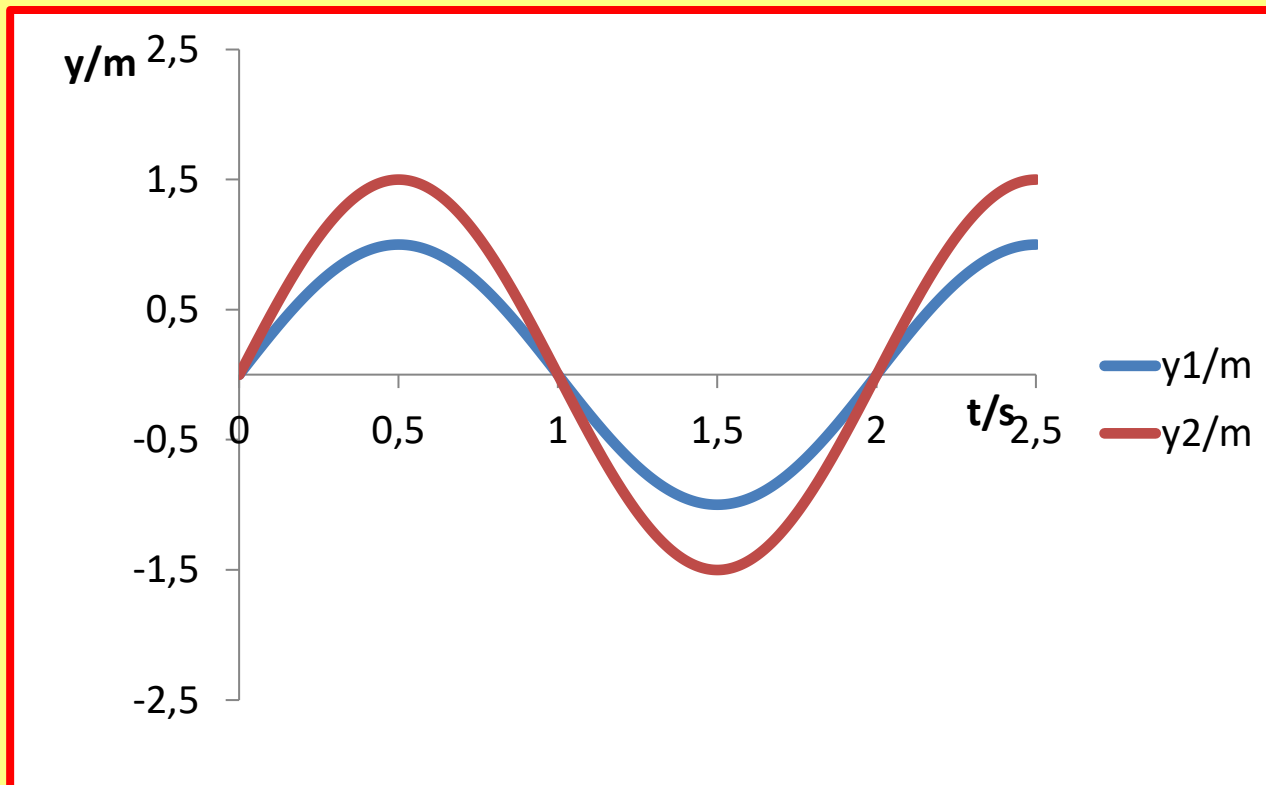
Jeho amplituda závisí na fázovém rozdílu:

$$\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

A) 1)  $\varphi_{01} = \varphi_{02}$      $\Delta\varphi = 0$

Mají-li skládaná kmitání stejnou počáteční fází:

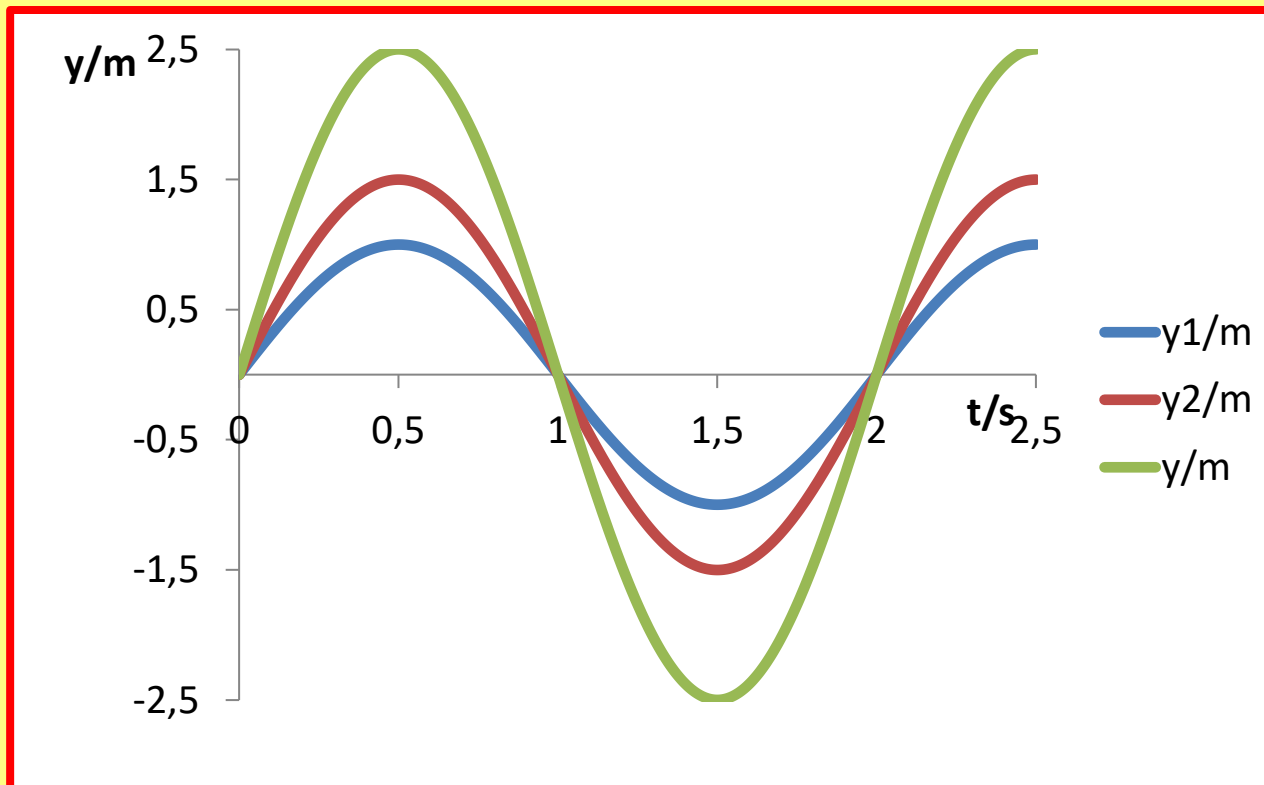


# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

A) 1)  $\varphi_{01} = \varphi_{02}$   $\Delta\varphi = 0$

Mají-li skládaná kmitání stejnou počáteční fázi:

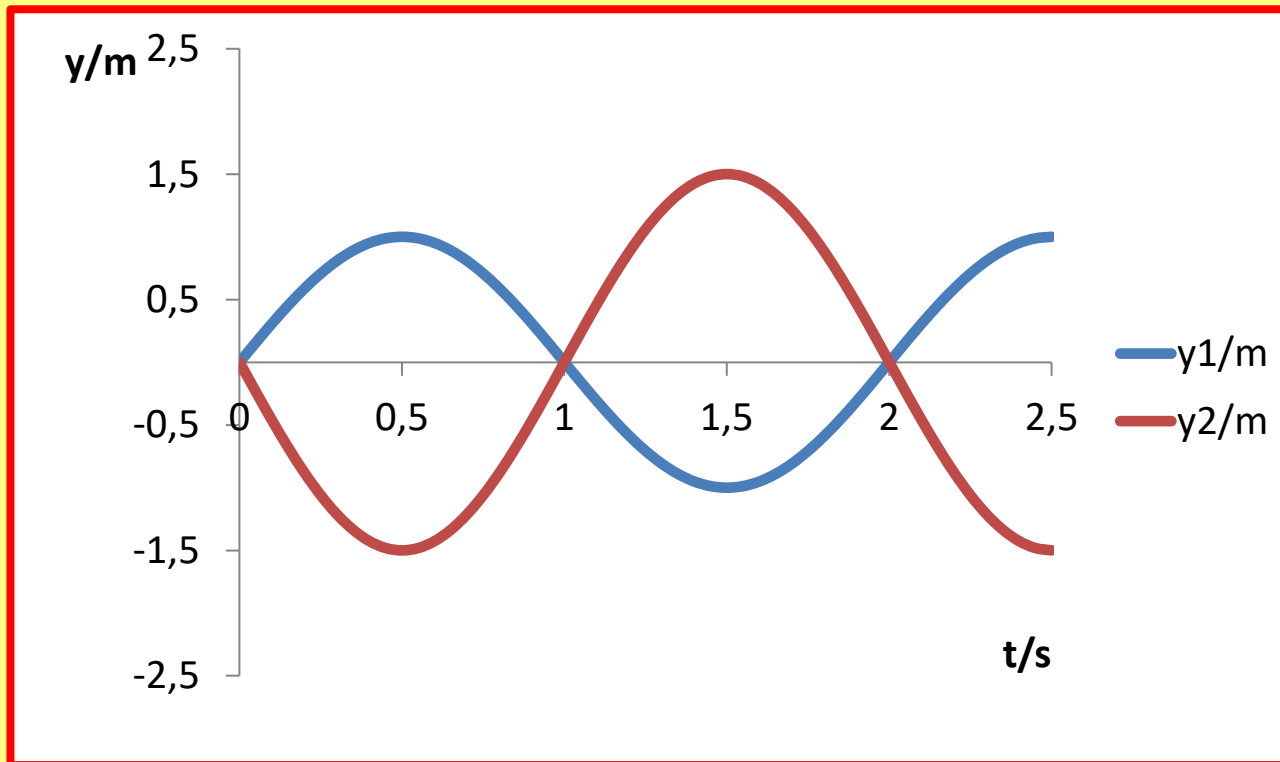
- $y_m$  je maximální  $y_m = y_{m1} + y_{m2}$
- výsledné kmitání má stejnou počáteční fázi jako jeho složky



# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

A) 2)  $\varphi_{01} = -\varphi_{02}$      $\Delta\varphi = \pi$

Mají-li skládaná kmitání opačnou počáteční fázi:



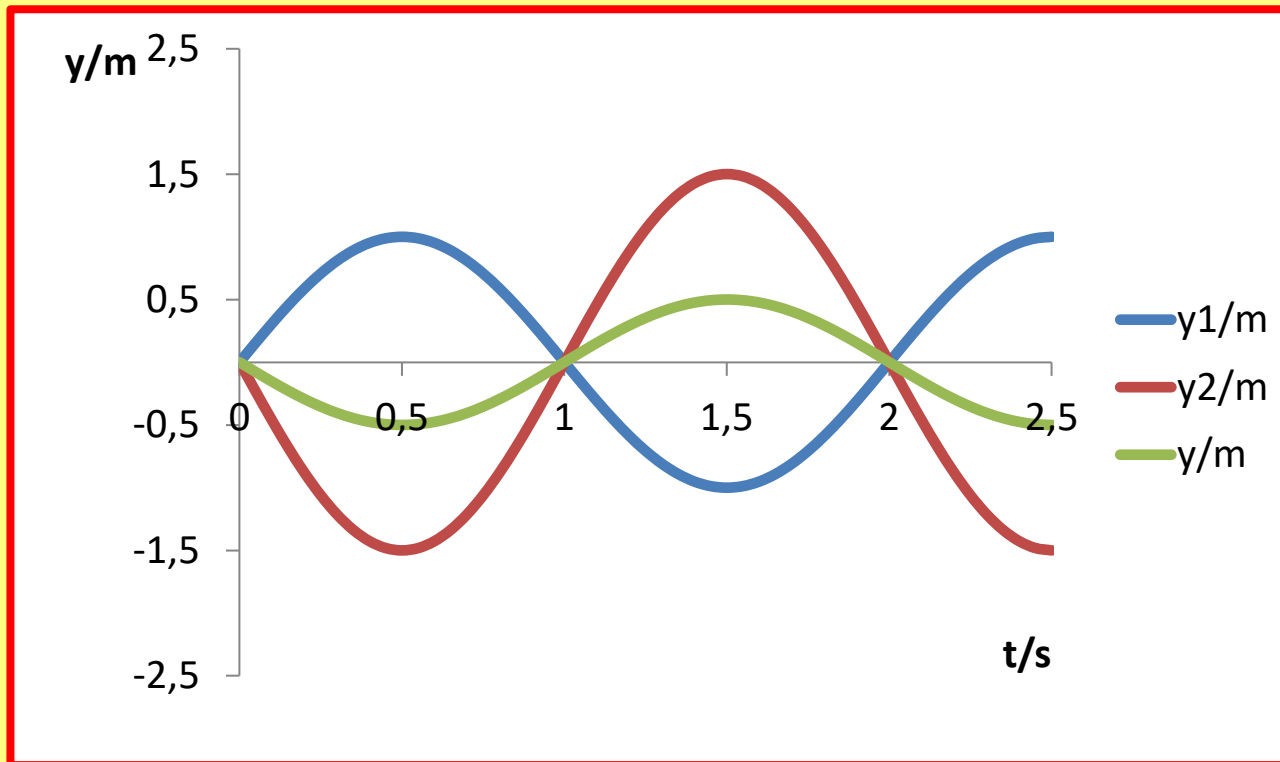


# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

A) 2)  $\varphi_{01} = -\varphi_{02}$   $\Delta\varphi = \pi$

Mají-li skládaná kmitání opačnou počáteční fázi:

- $y_m$  je minimální  $y_m = |y_{m1} - y_{m2}|$
- složené kmitání má stejnou počáteční fázi jako složka s větší amplitudou

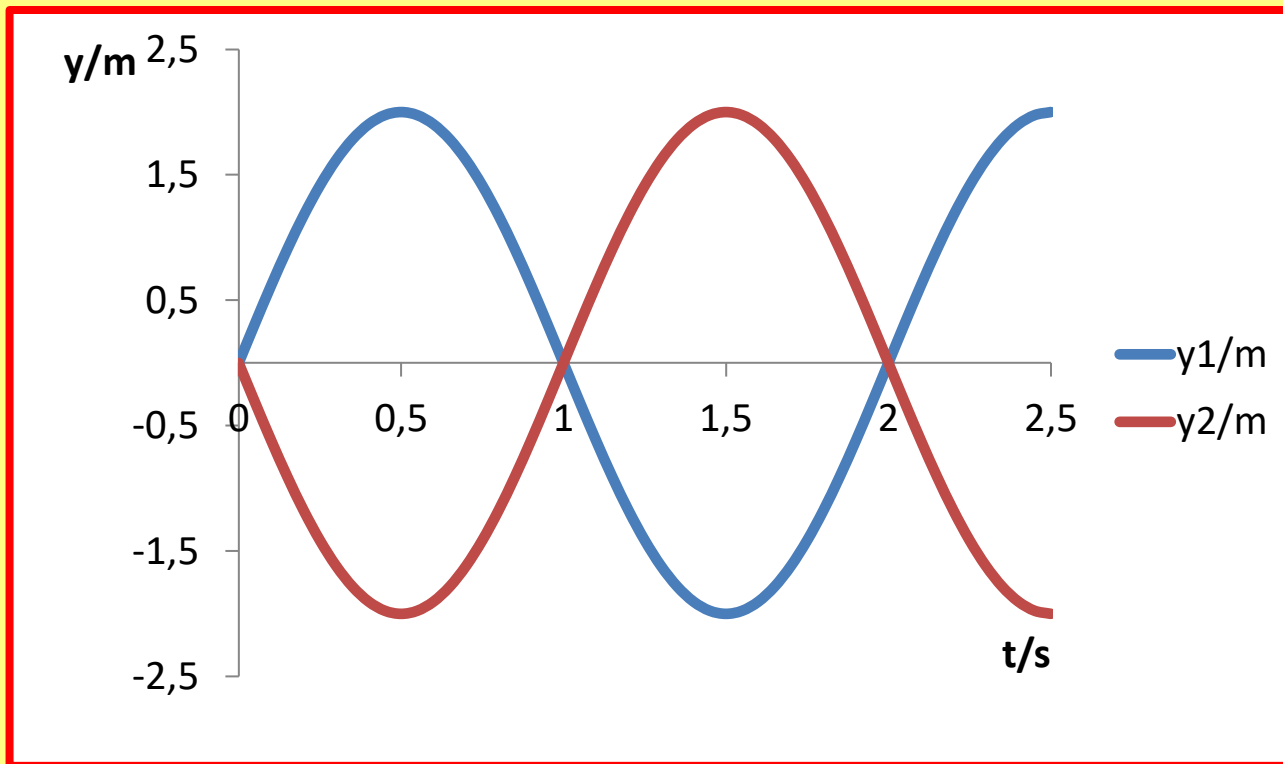


# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

A) 2)  $\varphi_{01} = -\varphi_{02}$      $\Delta\varphi = \pi$

**Mají-li skládaná kmitání opačnou počáteční fázi:**

- a stejnou amplitudu výchylky  $y_{m1} = y_{m2}$

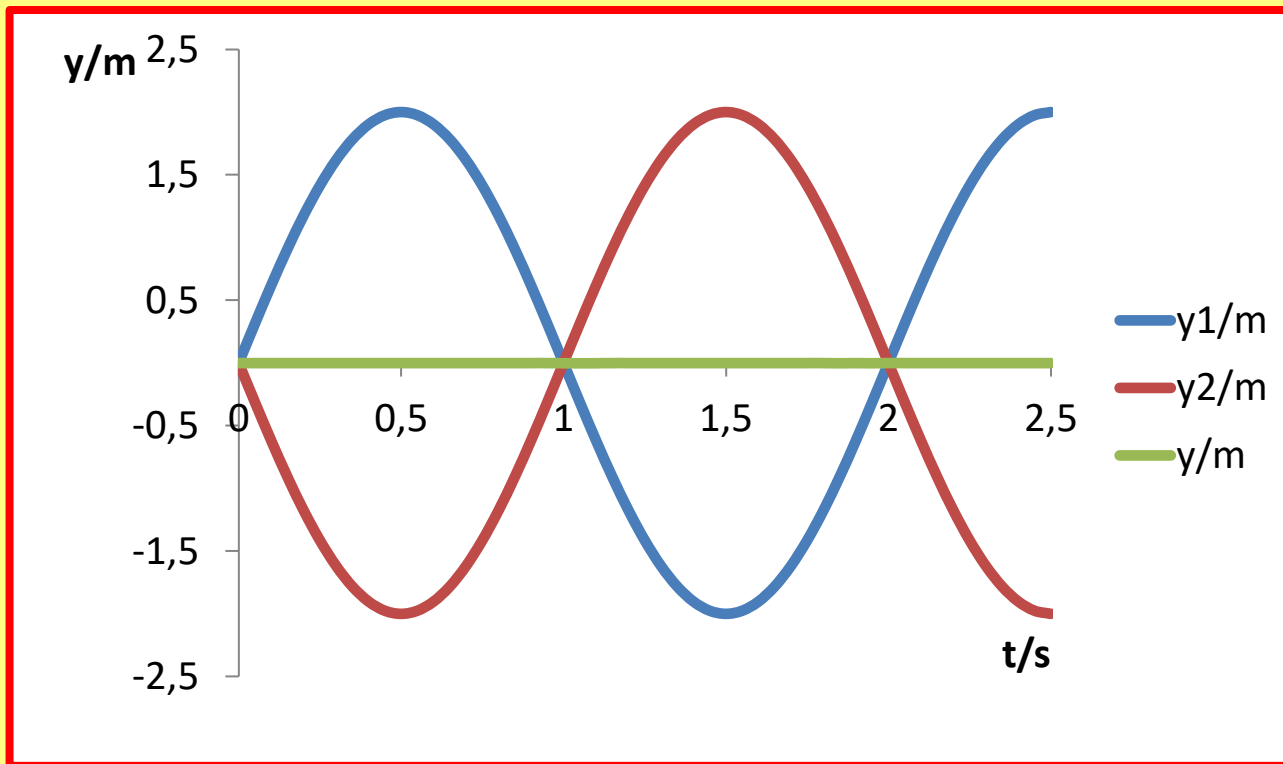


# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

A) 2)  $\varphi_{01} = -\varphi_{02}$      $\Delta\varphi = \pi$

**Mají-li skládaná kmitání opačnou počáteční fází:**

- a stejnou amplitudu výchylky  $y_{m1} = y_{m2}$   
je výsledná výchylka nulová a kmitání zaniká

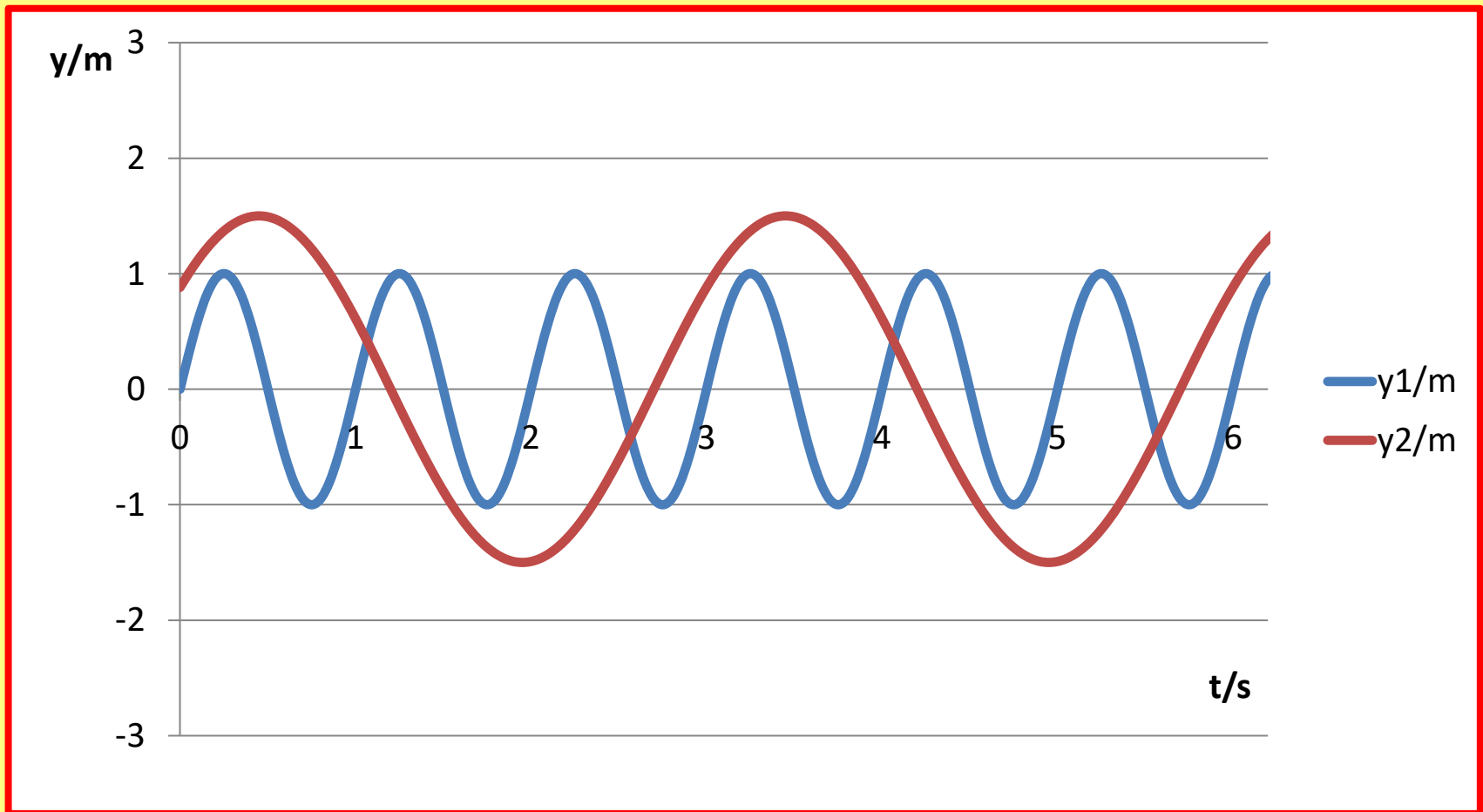


# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

**B)**

$$\omega_1 \neq \omega_2$$

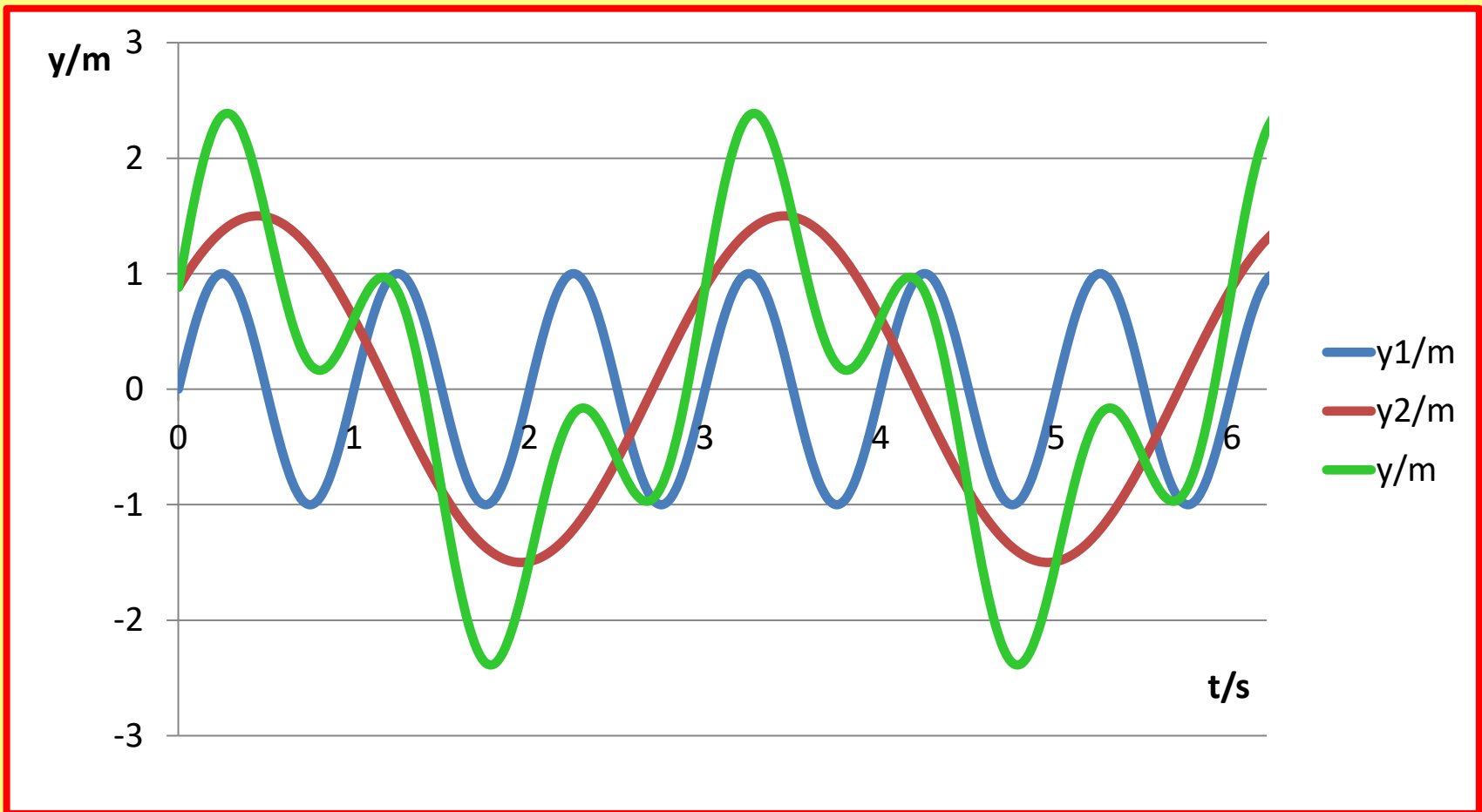
Je-li úhlová frekvence různá,



# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

**B)**  $\omega_1 \neq \omega_2$

Je-li úhlová frekvence různá,  
pak výsledné kmitání není harmonické.



# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

## RÁZY

vznikají, když se skládají dvě kmitání, jejichž úhlové frekvence se velmi málo liší.

$$\omega_1 \approx \omega_2$$

**Př.:**

Složení dvou kmitání se stejnou amplitudou a periodami 1s a 1,1 s.

# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

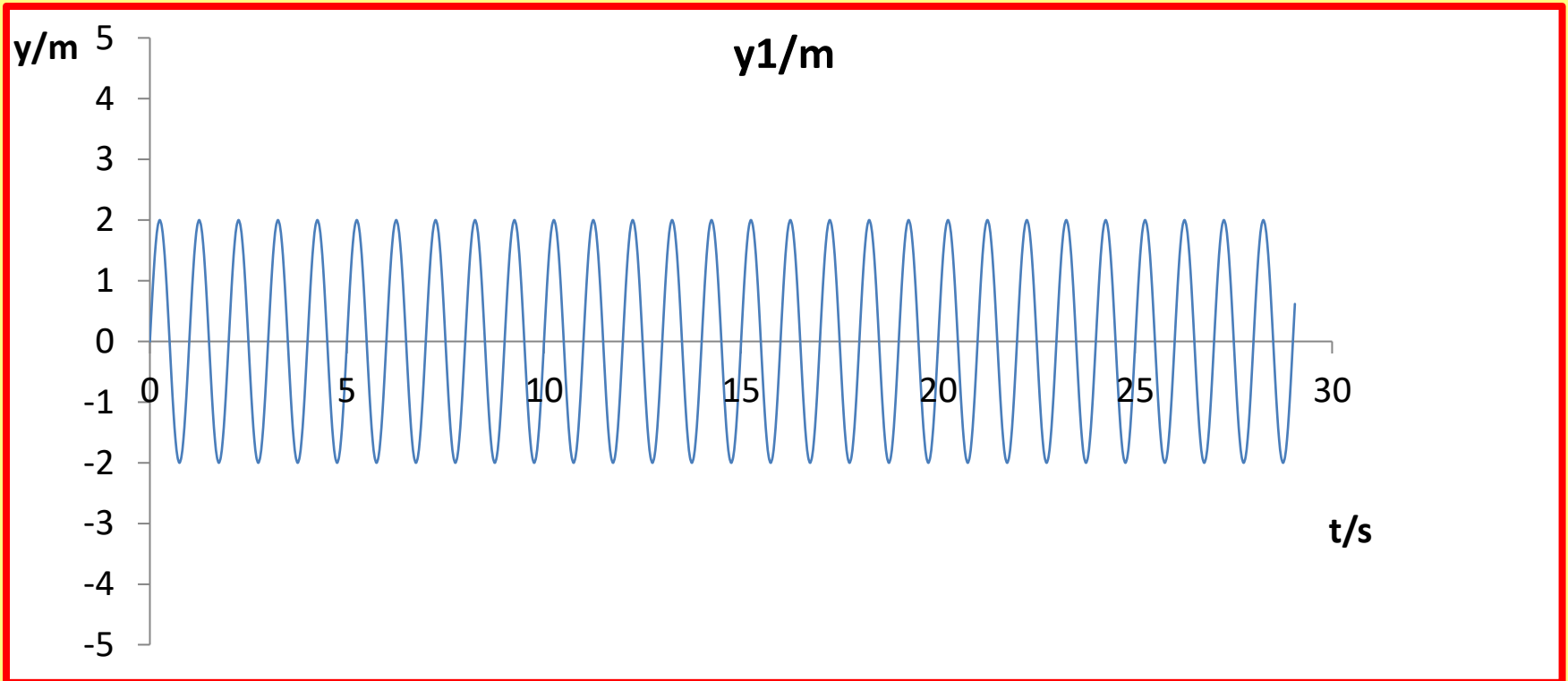
Časový diagram prvního kmitání.

$$T_1 = 1\text{s}$$

$$y_{m1} = 2\text{m}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{1} \text{s}^{-1} = 2\pi\text{s}^{-1}$$

$$\{y_1\} = 2 \sin(2\pi\{t\})$$



# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

Časový diagram druhého kmitání.

$$T_1 = 1s$$

$$y_{m1} = 2m$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{1} s^{-1} = 2\pi s^{-1}$$

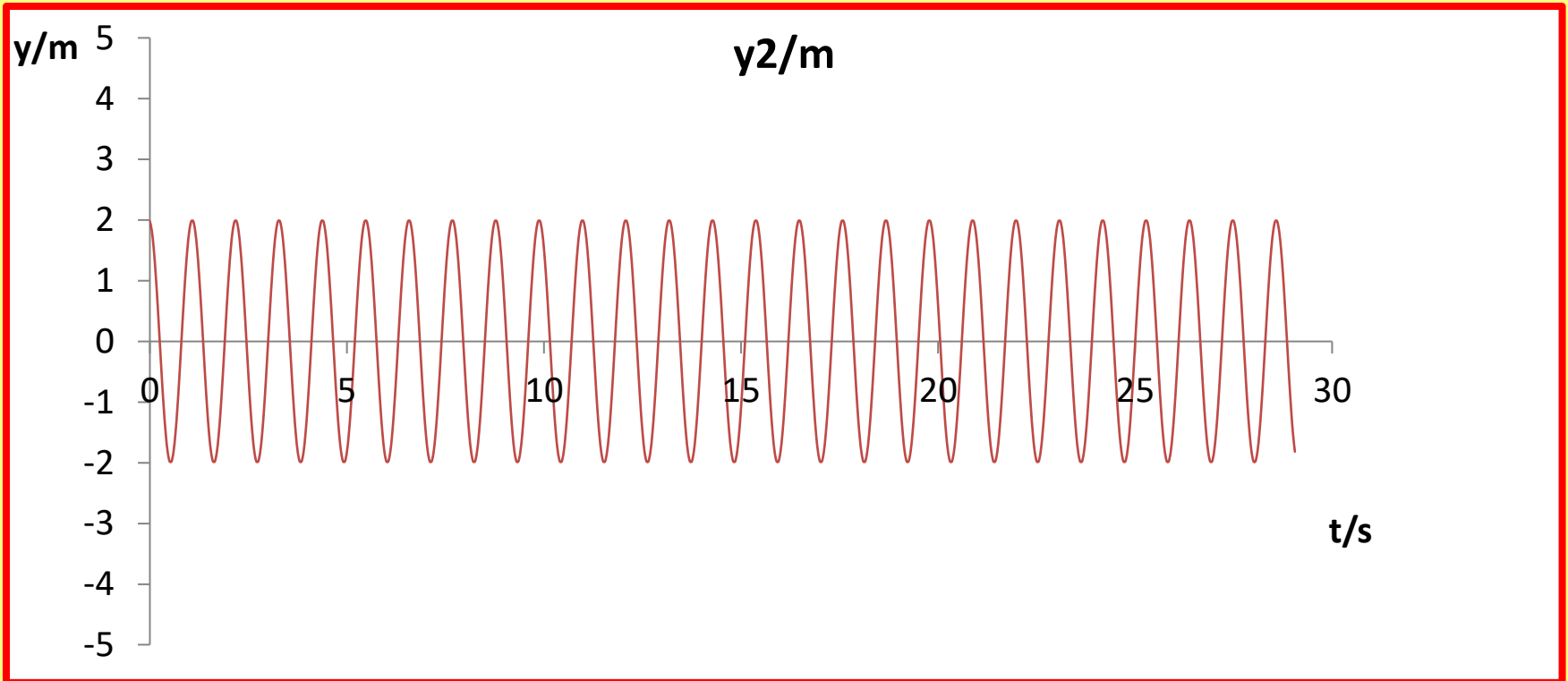
$$\{y_1\} = 2 \sin(2\pi \{t\})$$

$$T_2 = 1,1s$$

$$y_{m2} = 2m$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{1,1} s^{-1} = 1,8\pi s^{-1}$$

$$\{y_1\} = 2 \sin(1,8\pi \{t\})$$





# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

$$T_1 = 1s$$

$$y_{m1} = 2m$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{1} s^{-1} = 2\pi s^{-1}$$

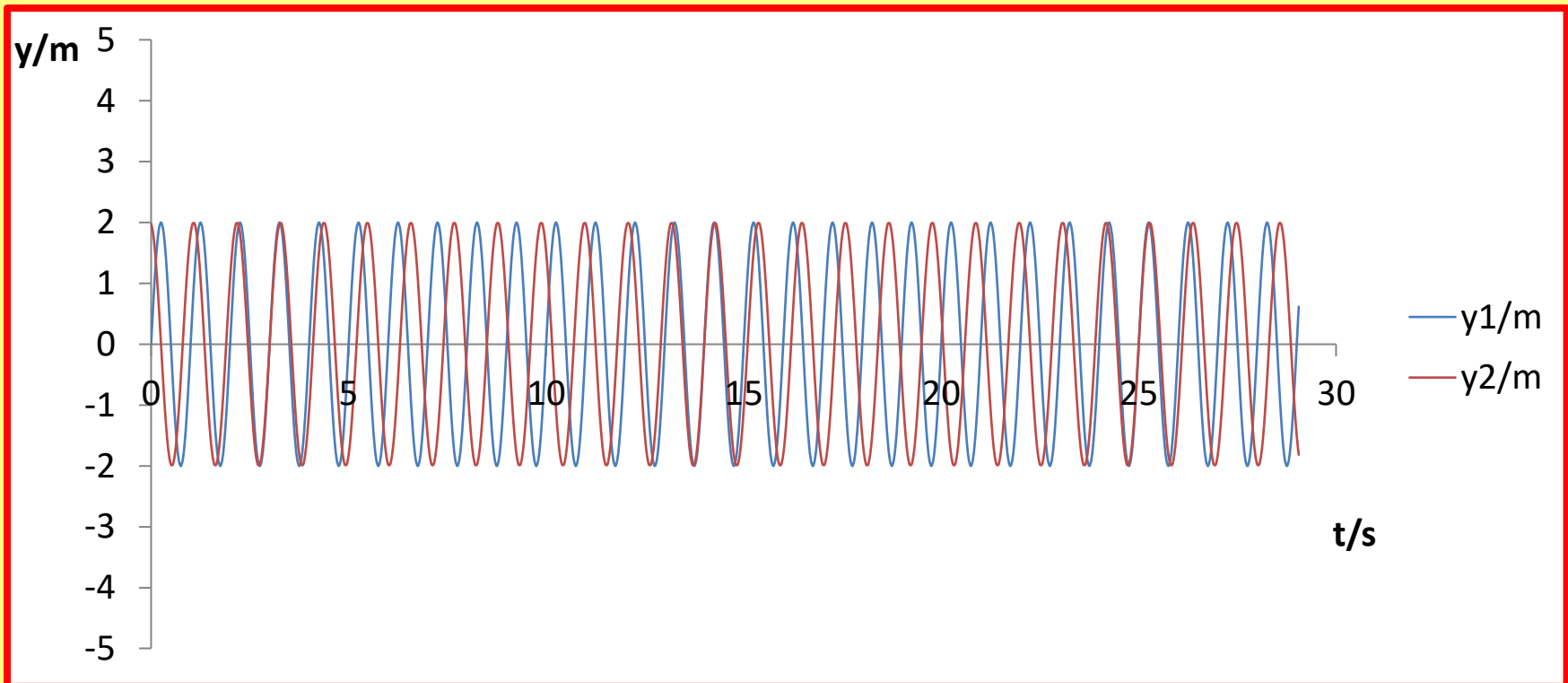
$$\{y_1\} = 2 \sin(2\pi \{t\})$$

$$T_2 = 1,1s$$

$$y_{m2} = 2m$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{1,1} s^{-1} = 1,8\pi s^{-1}$$

$$\{y_1\} = 2 \sin(1,8\pi \{t\})$$



# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

Časový diagram složeného kmitání s blízkou frekvencí složek.

$$T_1 = 1s$$

$$y_{m1} = 2m$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{1} s^{-1} = 2\pi s^{-1}$$

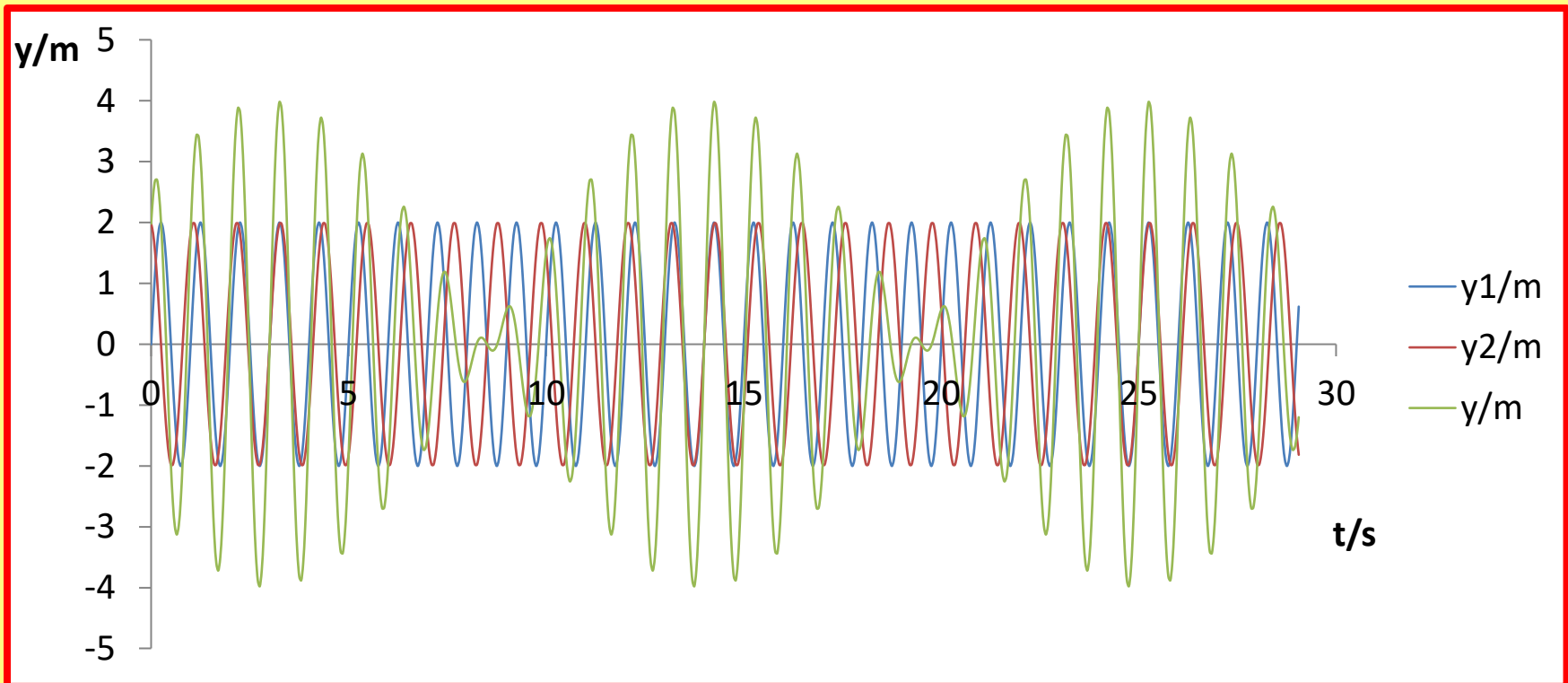
$$\{y_1\} = 2 \sin(2\pi \{t\})$$

$$T_2 = 1,1s$$

$$y_{m2} = 2m$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{1,1} s^{-1} = 1,8\pi s^{-1}$$

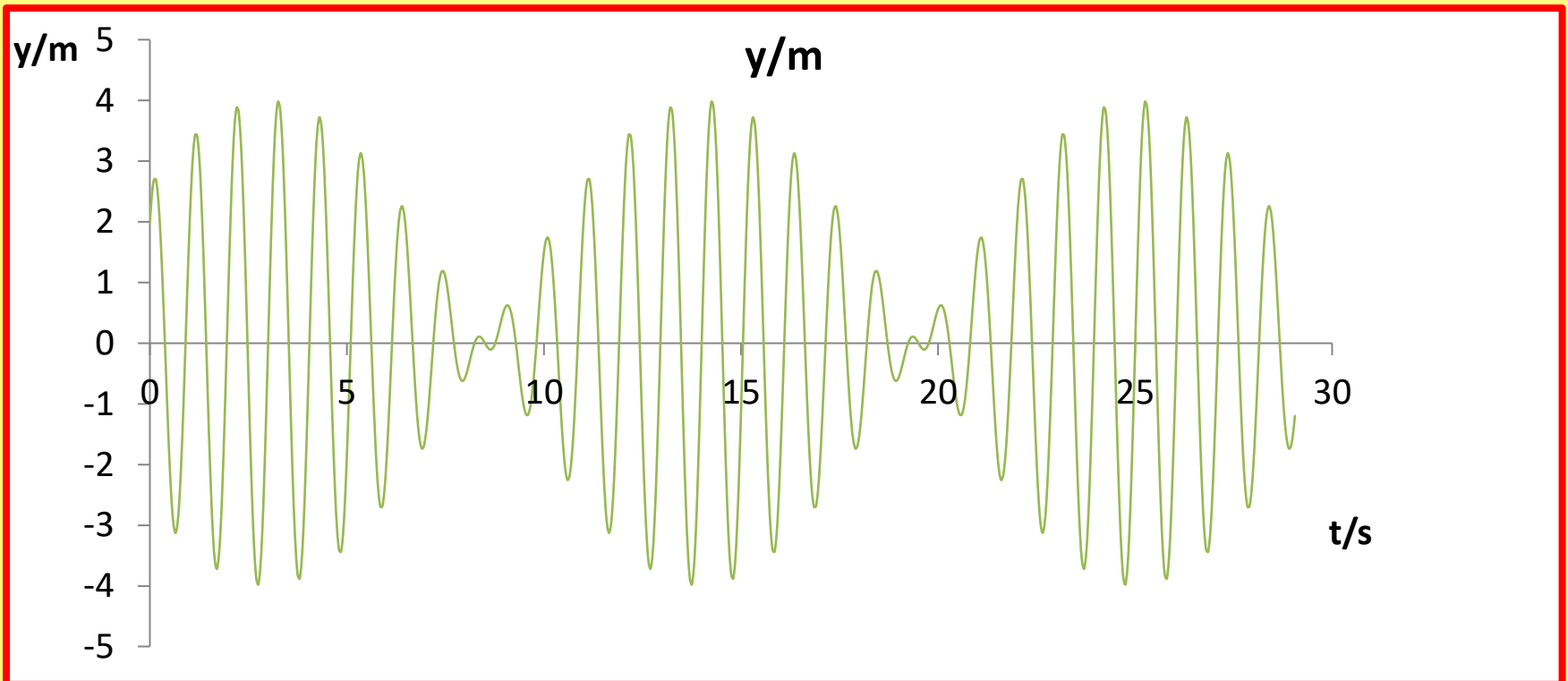
$$\{y_1\} = 2 \sin(1,8\pi \{t\})$$



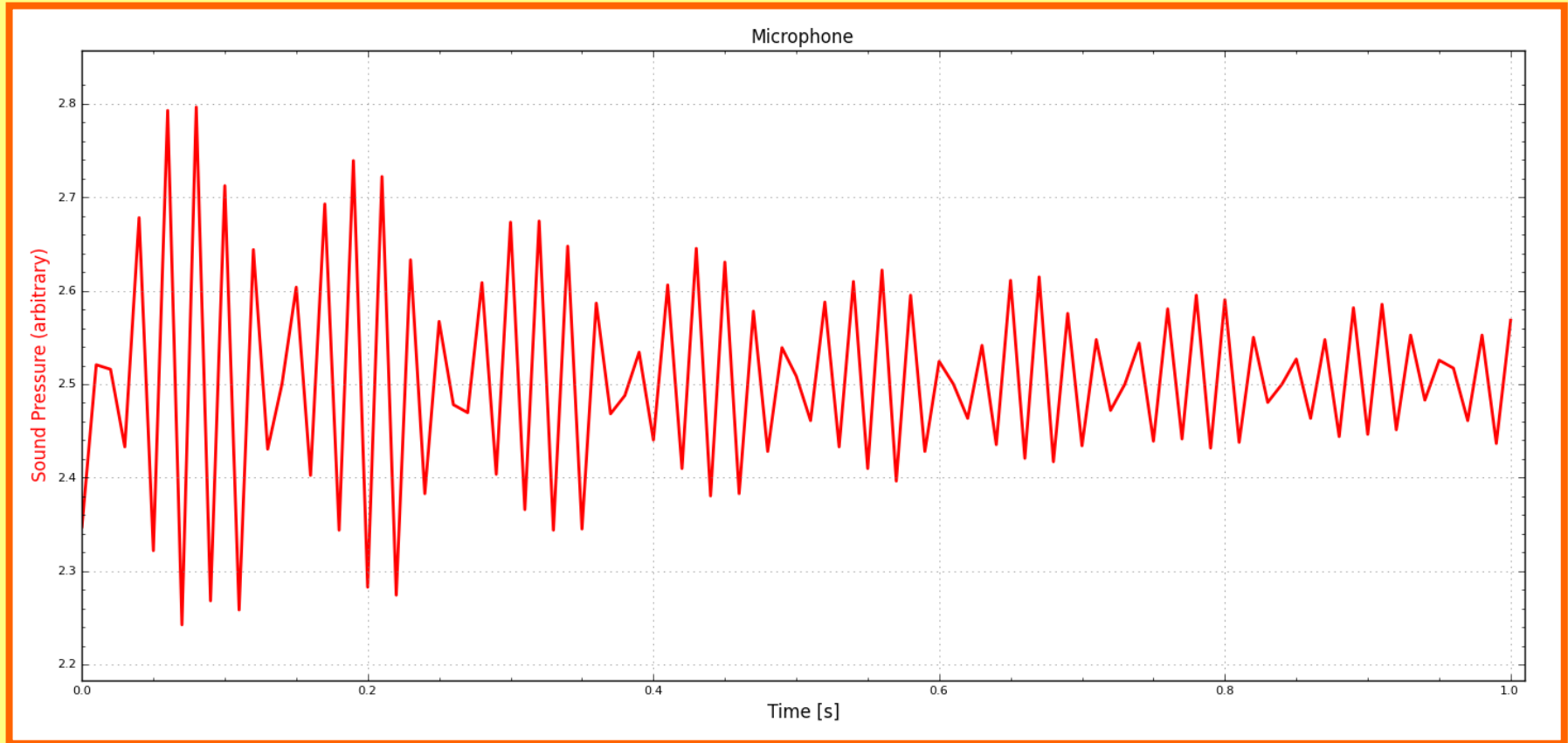
# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ

Amplituda výchylky výsledného kmitání se periodicky zvětšuje a zmenšuje.

Během jedné periody dosáhne složené kmitání maximální amplitudy dvakrát, frekvence rázů je dvojnásobná:  $f = f_1 - f_2$



# 1.5. SLOŽENÉ KMITÁNÍ



Rázy vzniklé na strunách kytary.

software EdLab čidlo - mikrofon

[ANIMACE KMITÁNÍ](#)

## 1.6. DYNAMIKA KMITAVÉHO POHYBU

Příčinou kmitavého pohybu je síla pružnosti (pružina) nebo síla tíhová (kyvadlo).

Pomocí druhého Newtonova pohybového zákona můžeme určit velikost síly:

$$F = ma = -m\omega^2 y$$

**pohybová rovnice harmonického kmitání ...**

# KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU

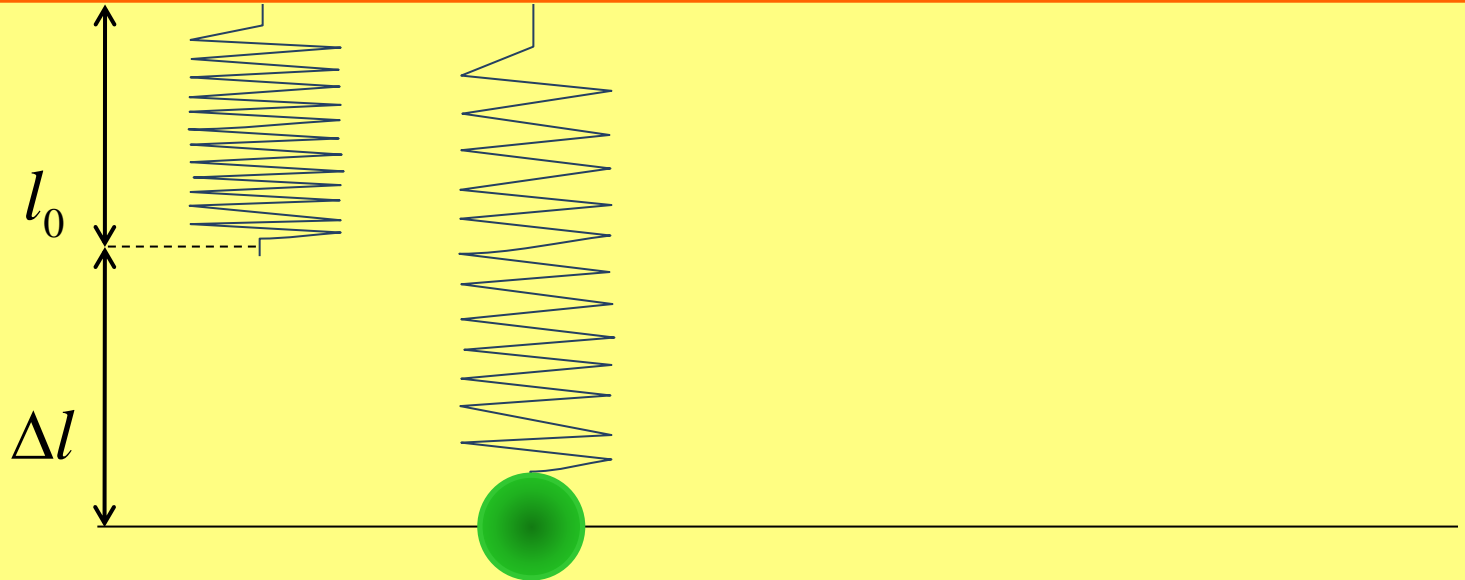
**mechanický oscilátor (MO)**

realizujeme závažím zavěšeným na pružině

$l_0$  – délka pružiny

$\Delta l$  – prodloužení pružiny po zavěšení tělesa

$$l = l_0 + \Delta l$$



**parametry MO**

$m$  – hmotnost tělesa zavěšeného na pružině

$k$  – tuhost pružiny

# KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ SILOU PRUŽNOSTI

$F_p$  – síla pružnosti brání deformaci

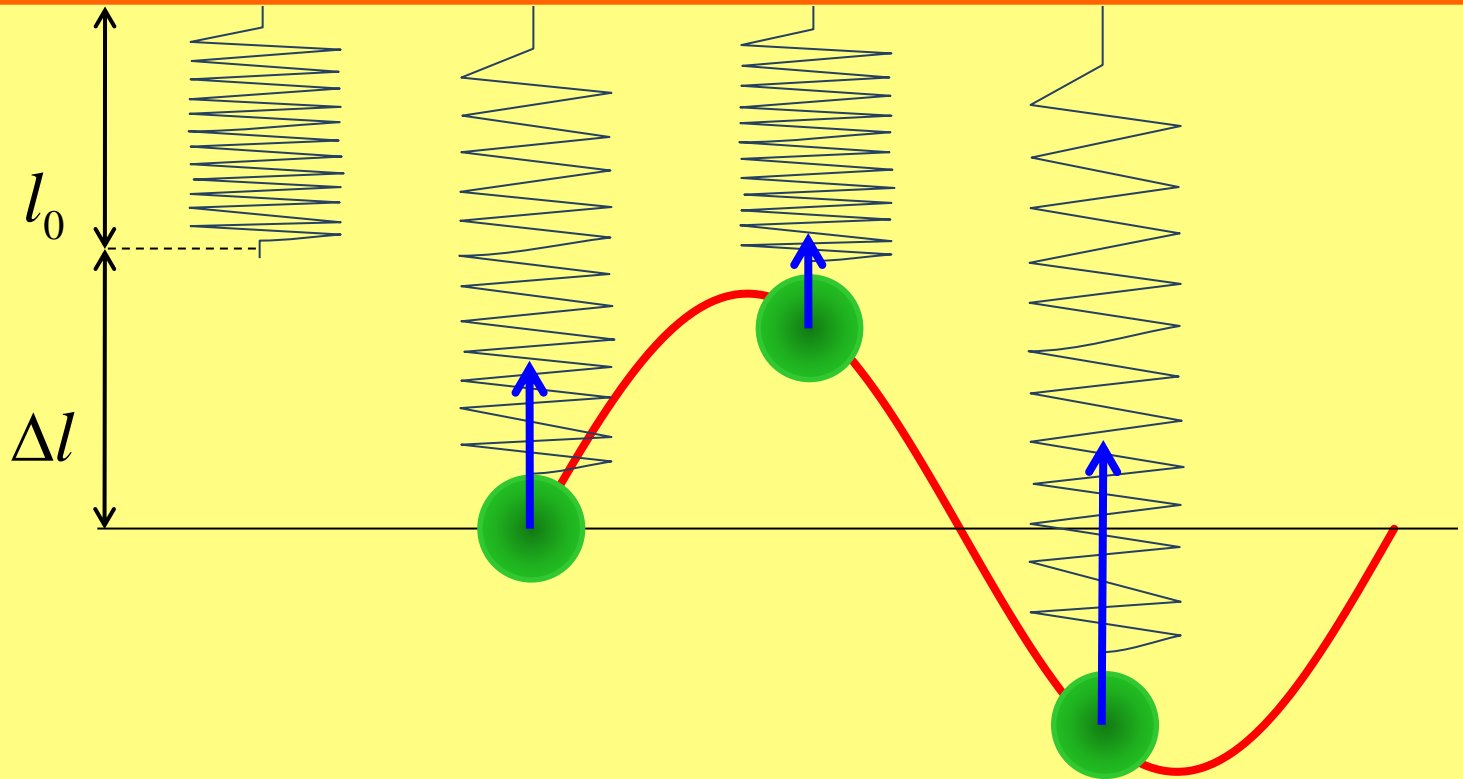
- přímo úměrná tuhosti  $k$
- z Hookova zákona – přímo úměrná prodloužení pružiny  $\Delta l$
- velikost se mění, směřuje nahoru (při zavěšení pružiny)

$$l = l_0 + \Delta l$$

$$F_p = k\Delta l$$

$$k = \frac{F_p}{\Delta l}$$

$$[k] = Nm^{-1}$$



# KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ SILOU PRUŽNOSTI

## $F_G$ – tíhová síla

- stále stejná velikost a směr svisle dolů  
v rovnovážné poloze platí:

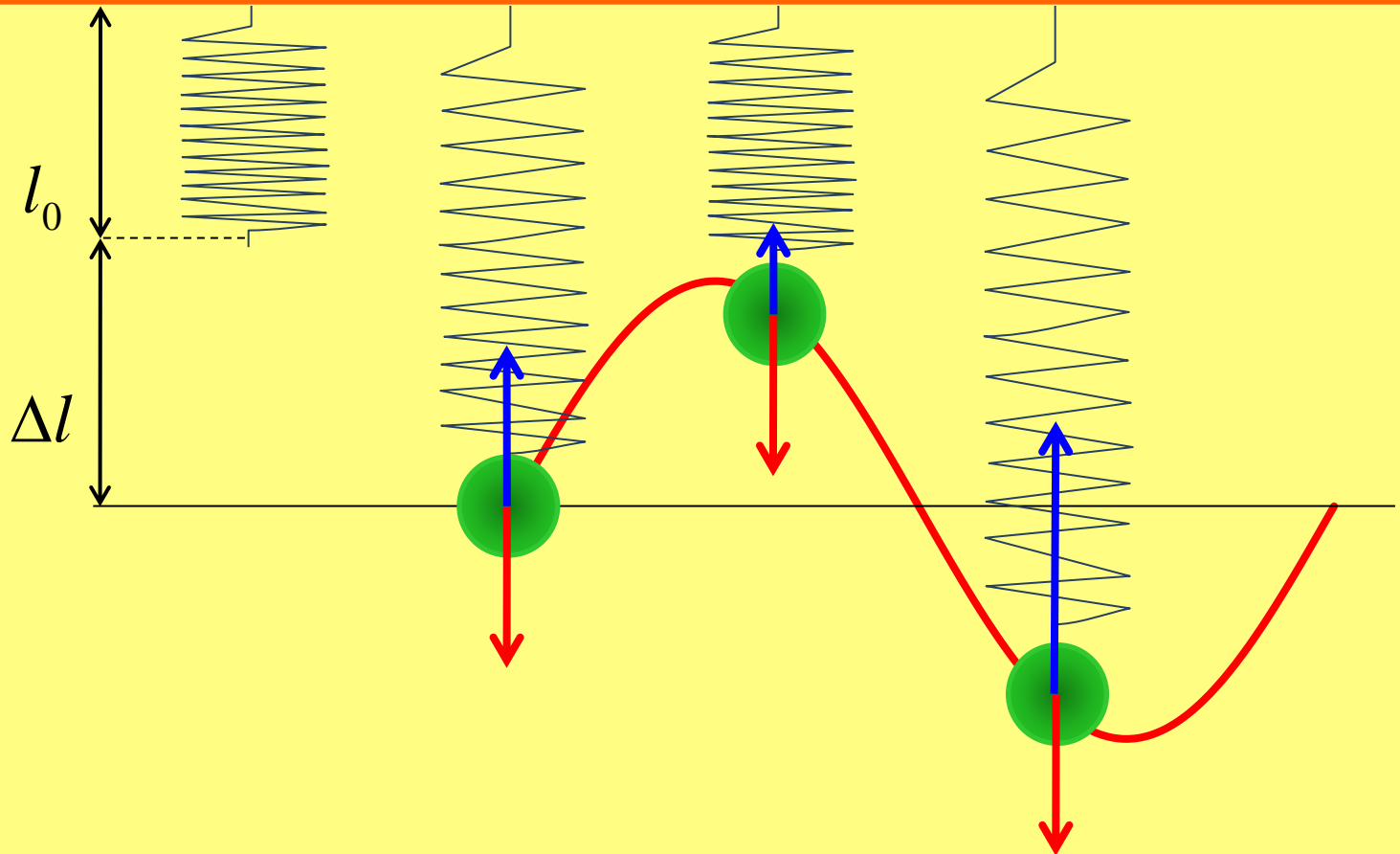
$$F_p = F_G$$
$$k\Delta l - mg = 0$$

$$l = l_0 + \Delta l$$

$$F_p = k\Delta l$$

$$k = \frac{F_p}{\Delta l}$$

$$[k] = Nm^{-1}$$





# KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ SILOU PRUŽNOSTI

**F – výsledná síla** – vektorový součet tíhové síly a síly pružnosti

- je příčinou harmonického kmitání MO
- je přímo úměrná výchylce oscilátoru z RP
- stále směřuje do RP

$$F_p = F_G$$
$$k\Delta l - mg = 0$$

$$l = l_0 + \Delta l$$

$$F_p = k\Delta l$$

$$k = \frac{F_p}{\Delta l}$$

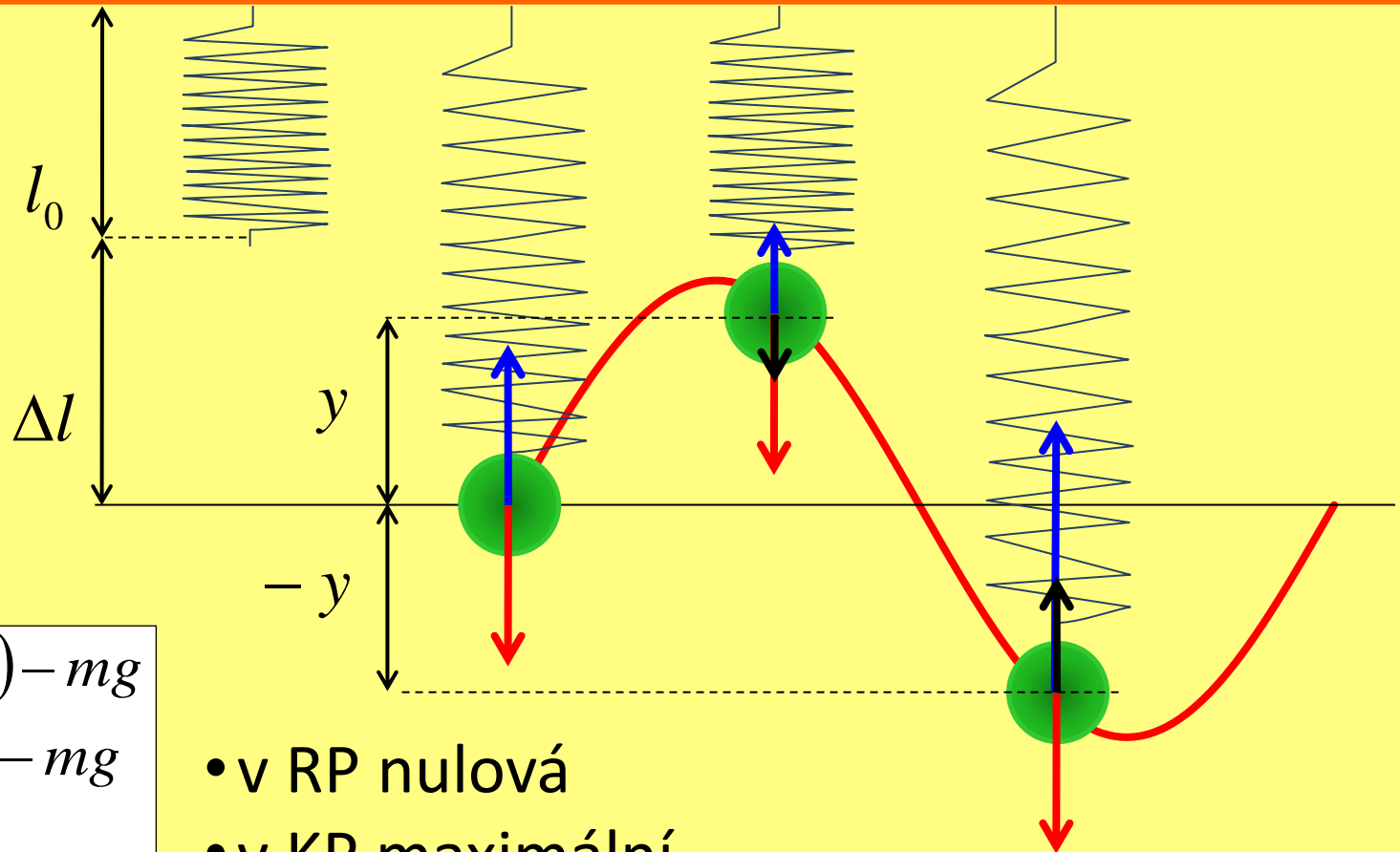
$$[k] = Nm^{-1}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_G$$

$$F = k(\Delta l - y) - mg$$

$$F = k\Delta l - ky - mg$$

$$F = -ky$$



- v RP nulová
- v KP maximální

# KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ SILOU PRUŽNOSTI

Úhlová frekvence závisí jen na parametrech  
volně kmitajícího MO.

Takové kmitání označujeme jako **vlastní kmitání oscilátoru**.

$$F = ma = -m\omega^2 y = -ky$$

$$m\omega^2 = k$$

**vlastní úhlová frekvence**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**vlastní perioda**

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

**vlastní frekvence**

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

# 1. 7. KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU

## KYVADLO

je jakékoliv těleso zavěšené nad těžištěm.

Pokud je vychýleno z rovnovážné polohy, koná kývavý pohyb.

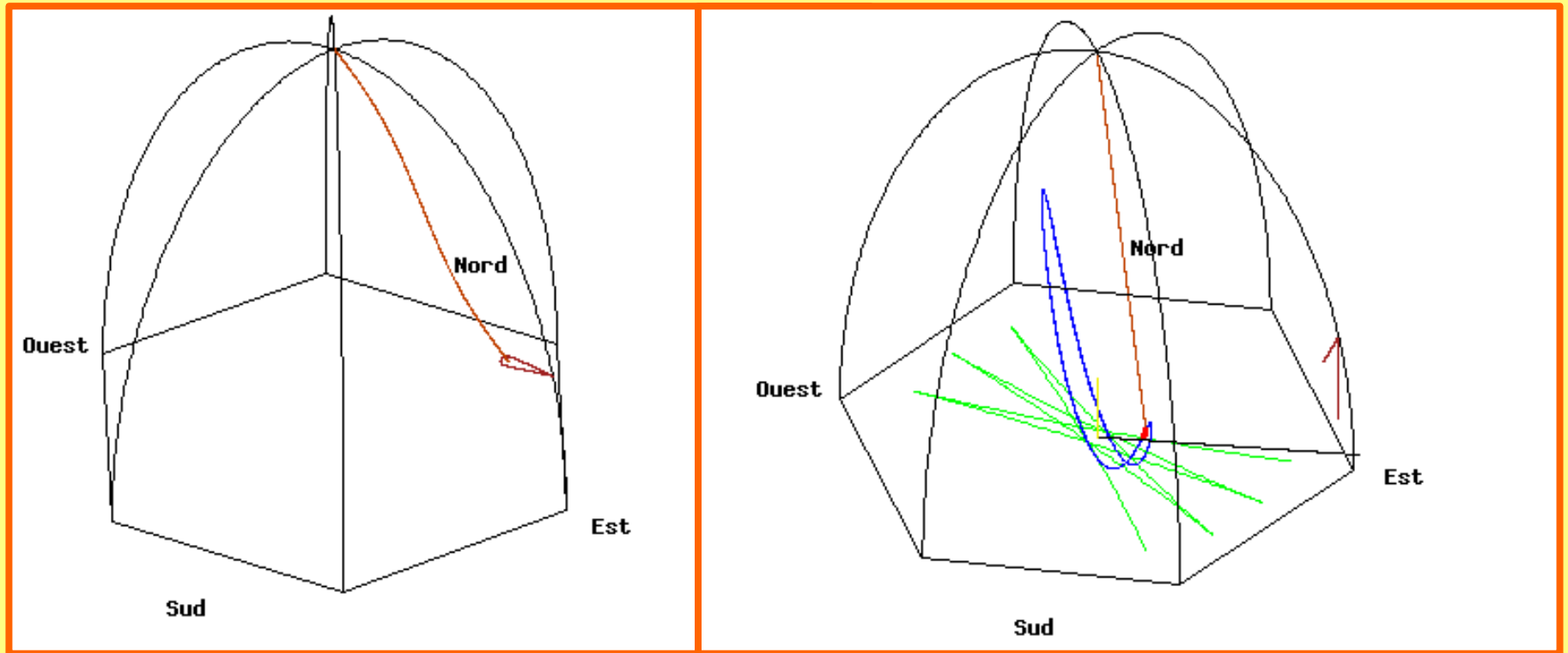


## Foucaultovo kyvadlo

Rovina kyvu kyvadla se během jeho pohybu zachovává.

Obr.: 6 - Animace  
pohybu Foucaultova kyvadla,  
dokazujícího rotaci Země  
kolem osy *Foucault pendulum*

# 1. 7. KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU



Obr.: 7, 8 - Animace Foucaultova kyvadla z pařížského Panthéonu

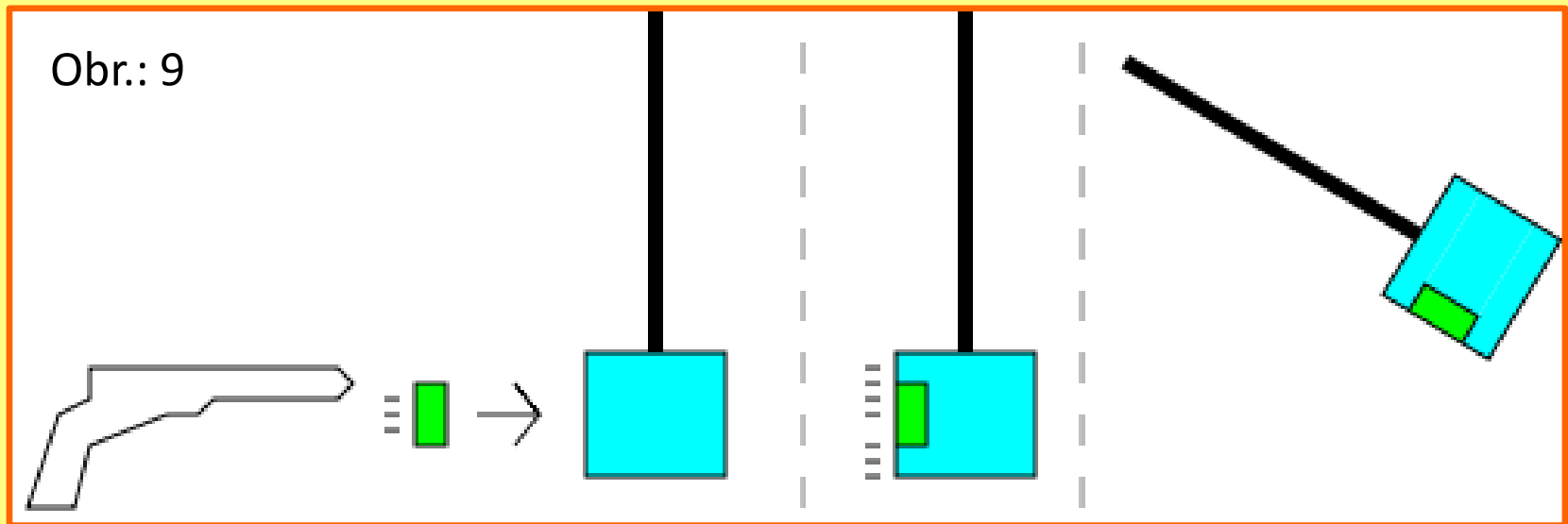
Standardní pohled

Pohled z oscilační roviny

# 1. 7. KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU

## Balistické kyvadlo

je zařízení pro určování hybnosti projektilu.

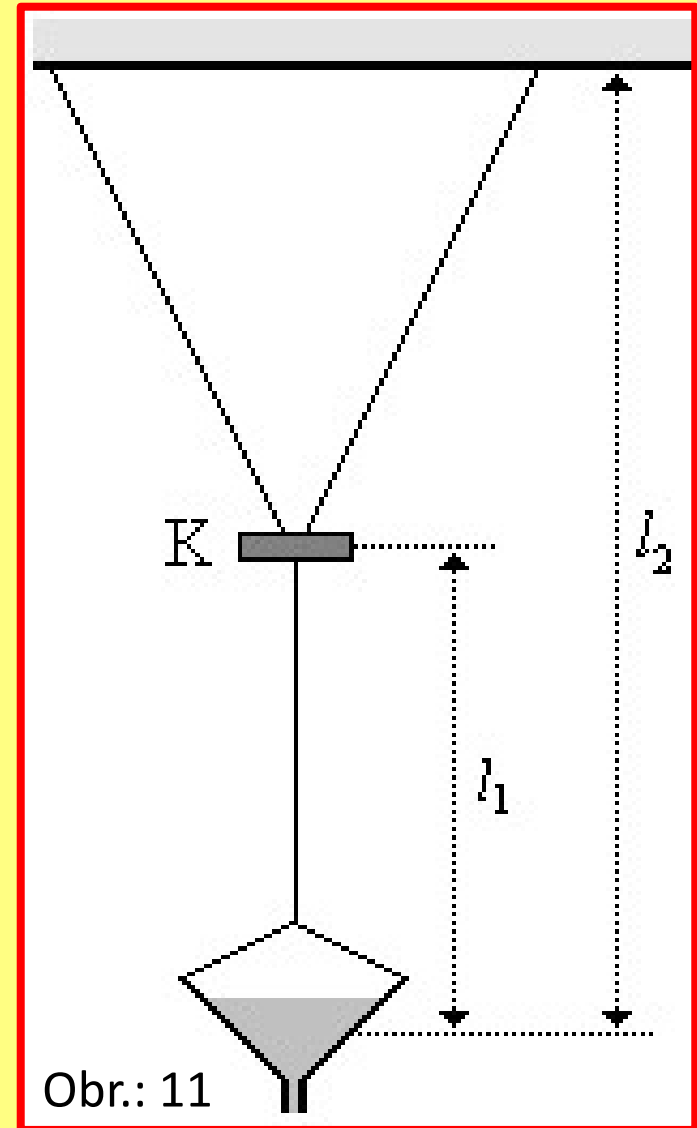


# 1. 7. KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU

## Blackburnovo kyvadlo

- závěs ve tvaru písmene Y.

K němu je připevněna nádobka se sypkým materiálem, který se po uvolnění kyvadla z výchozí pozice rovnoměrně odsypává a zaznamenává trajektorii pohybu.



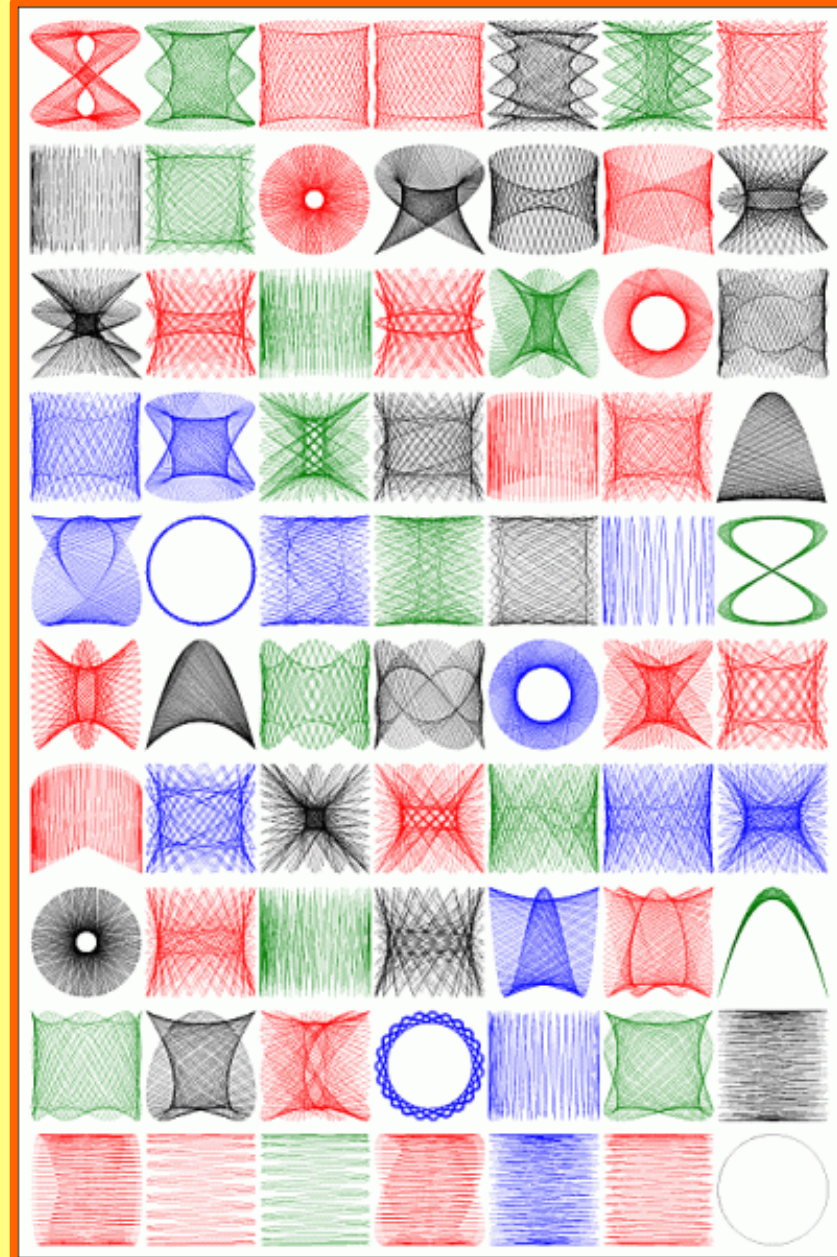
# 1. 7. KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU

Nastavíme-li délky závěsů kyvadel tak, aby jejich poměr byl vyjádřen podílem dvou celých čísel, bude kyvadlo opisovat jednoduché křivky → **Lissajousovy obrazce.**

Kyvadlo se kýve ve dvou na sebe navzájem kolmých směrech.

## Využití:

- určení neznámé frekvence kmitů (Neznámé kmity se složí kolmo s kmity o známé frekvenci.)
- kalibrace ladičky
- zjištění rychlosti zvuku ve vzduchu



Obr.: 12

# 1. 7. KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU

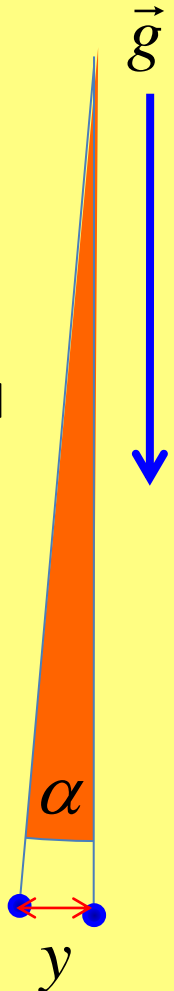
## Další druhy kyvadel

1. **Fyzické** kyvadlo,  
u něhož je nutné vzít v úvahu jeho moment setrvačnosti
2. **Kónické** kyvadlo,  
které opisuje při svém pohybu plášť kužele;  
vrchol kužele přitom leží v místě upevnění kyvadla
3. **Matematické** kyvadlo,  
nejjednodušší typ; jedná se o **HB** na dlouhém závěsu

Omezíme se na malé výchylky, abychom mohli oblouk považovat za úsečku,  $\alpha < 5^\circ$  ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ).

## Zanedbáme

- tření v bodě závěsu
- i odporovou sílu vzduchu.



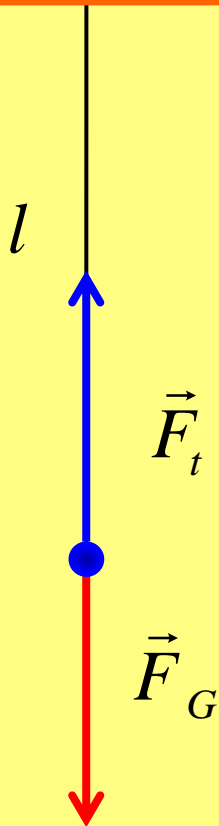


# 1. 7. KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU

V rovnovážné poloze kyvadla  
je tíhová síla rovna tahové síle závěsu.

$l$  – délka kyvadla

$$F_t = F_G$$

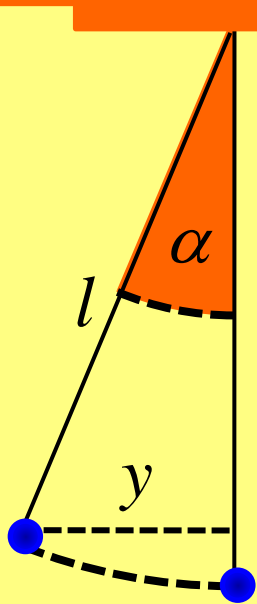


# 1. 7. KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU

Příčinou kmitavého pohybu  
je pohybová složka  $F$  tíhové síly  $F_G$ .

Síla  $F$  vzniká při vychýlení kyvadla z RP.

$y$  – délka oblouku opsaného hmotným bodem – výchylka



# 1. 7. KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU

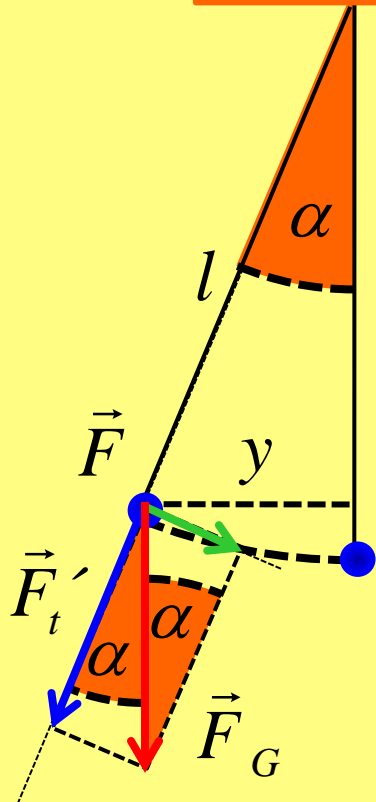
Příčinou kmitavého pohybu  
je pohybová složka  $F$  tíhové síly  $F_G$ .

Síla  $F$  vzniká při vychýlení kyvadla z RP.

$y$  – délka oblouku opsaného hmotným bodem – výchylka

Tíhovou sílu rozložíme do dvou směrů.

Ve směru závěsu působí tahová síla vlákna  $F_t$ ,  
v kolmém směru síla  $F$ , která způsobuje kmitání.

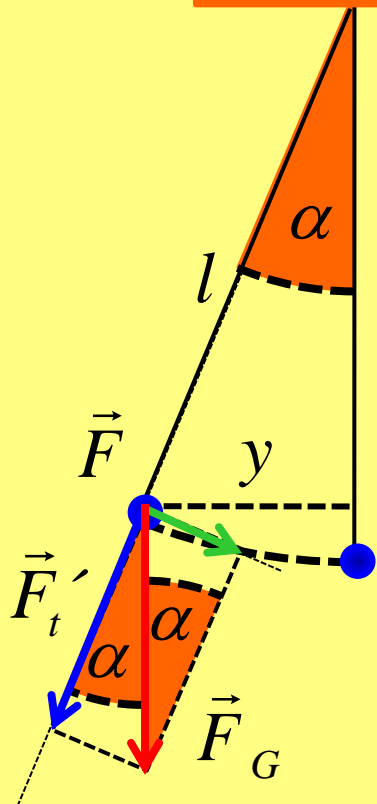


# 1. 7. KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU

Příčinou kmitavého pohybu  
je pohybová složka  $F$  tíhové síly  $F_G$ .

Síla  $F$  vzniká při vychýlení kyvadla z RP.

$y$  – délka oblouku opsaného hmotným bodem – výchylka



$$\sin \alpha \approx \frac{F}{F_G} \approx \frac{y}{l}$$

$$F = F_G \frac{y}{l} = mg \frac{y}{l}$$

**pohybová rovnice**

$$F = ma = -m\omega^2 y$$

$$F = -m\omega^2 y = -m \frac{g}{l} y$$

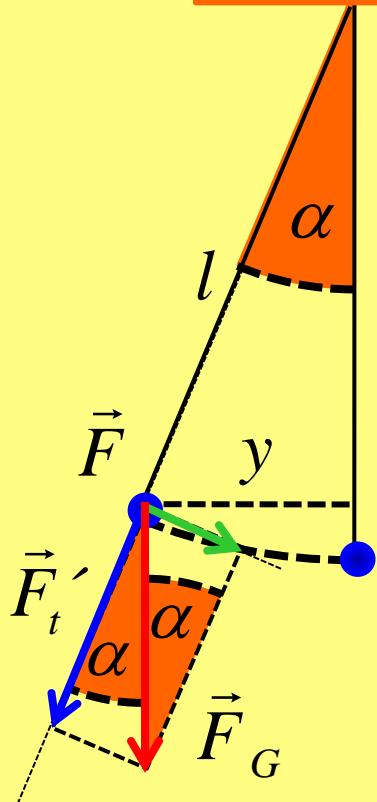
Znaménko mínus vyjadřuje,  
že síla je orientovaná opačně než výchylka.  
Síla  $F$  působí vždy směrem do RP,  
zatímco výchylka se měří od RP.

# 1. 7. KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU

**Vlastní kmitání** kyvadla závisí

pouze na délce kyvadla a na tíhovém zrychlení  $g$ .

Nezávisí na hmotnosti tělesa zavěšeného na kyvadle.



**VLASTNÍ**

úhlová  
frekvence  $\rightarrow$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

perioda  $\rightarrow$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

frekvence  $\rightarrow$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

z pohybové rovnice:

$$F = -m\omega^2 y = -m \frac{g}{l} y$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

# 1. 7. KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU

## Sekundové kyvadlo

Jakou délku musí mít kyvadlo, aby doba kyvu byla právě 1 s?

- kyv – kyvadlo vykoná mezi dvěma průchody RP
- doba kyvu  $\tau = T/2$

$$\tau = 1s \leftrightarrow T = 2s$$

$$g = 9,81ms^{-2}$$

$$l = ?$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$l = \frac{T_0^2 g}{4\pi^2}$$

$$l = \frac{2^2 \cdot 9,81}{4\pi^2} m = 0,994m = 1m$$

# 1. 7. KMITÁNÍ ZPŮSOBENÉ TÍHOVOU SILOU

Konstrukcí prvních kyvadlových hodin se zabýval holandský fyzik Christian Huygens (1629 - 1695).



Obr.: 10

# 1. 8. PŘEMĚNY ENERGIE V MO

Při harmonickém kmitání mechanického oscilátoru dochází k periodickým přeměnám kinetické energie v energii potenciální a naopak.

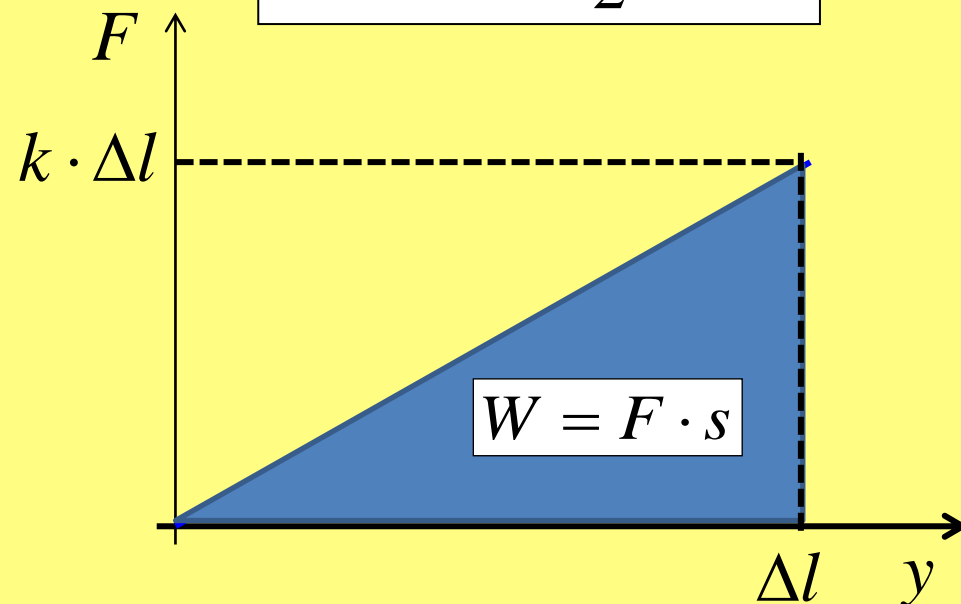
- **v rovnovážné poloze** - po zavěšení tělesa má oscilátor klidovou potenciální energii  $E_0$

- $E_{pt}$  potenciální energie tíhová
- $E_{pr}$  potenciální energie pružnosti je rovna práci vykonané pružinou při prodloužení o délku  $\Delta l$  (obsah plochy pod křivkou)

$$E_{pr} = W = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l)^2$$

$$E_0 = E_{pt} + E_{pr}$$

$$E_0 = mgh + \frac{1}{2} k (\Delta l)^2$$





# 1. 8. PŘEMĚNY ENERGIE V MO

- **po vychýlení z RP**

při výchylce  $y$  a velikosti okamžité rychlosti  $v$  je celková energie oscilátoru rovna:

$$E_C = mg(h + y) + \frac{1}{2}k(\Delta l - y)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_C = mgh + mgy + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 - k\Delta ly + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_0 = mgh + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

$$F_p = F_G$$
$$k\Delta l - mg = 0$$

$$E_C = E_0 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

# 1. 8. PŘEMĚNY ENERGIE V MO

## v rovnovážné poloze

- rychlost je maximální → kinetická energie je maximální
- výchylka je nulová → potenciální energie je nulová

$$E_{k \max} = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 y_m^2$$

## v krajních polohách

- rychlost je nulová → kinetická energie je nulová
- výchylka je maximální → potenciální energie je maximální
- u tělesa na pružině      potenciální energie pružnosti
- u kyvadla                      potenciální energie polohy

$$E_{p \max} = \frac{1}{2} k \cdot y_m^2$$

# 1. 8. PŘEMĚNY ENERGIE V MO

Pokud na oscilátor nepůsobí vnější síly, je celková mechanická energie kmitání konstantní.

Oscilátor kmitá s konstantní amplitudou.

$$E_C = E_0 + \frac{1}{2}ky_m^2 = E_0 + \frac{1}{2}mv_m^2 = \textit{konst.}$$

$$E_{km} = \frac{1}{2}ky_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 = \textit{konst.}$$

**Celková energie kmitání mechanického oscilátoru je konstantní.**

Je přímo úměrná druhé mocnině amplitudy výchylky, popř. druhé mocnině amplitudy rychlosti vlastního kmitání.

# 1. 8. PŘEMĚNY ENERGIE V MO

## NETLUMENÉ KMITÁNÍ

- zanedbáváme ztráty energie
- na MO nepůsobí žádné vnější síly
- amplituda kmitání se nemění

## TLUMENÉ KMITÁNÍ

- vzniká, působí-li na MO odporové síly.
- mechanická energie se mění na jinou formu energie a vznikají ztráty.

## Tlumení závisí

- na hustotě prostředí, v němž oscilátor kmitá
- na velikosti rychlosti jeho pohybu

# 1. 8. PŘEMĚNY ENERGIE V MO

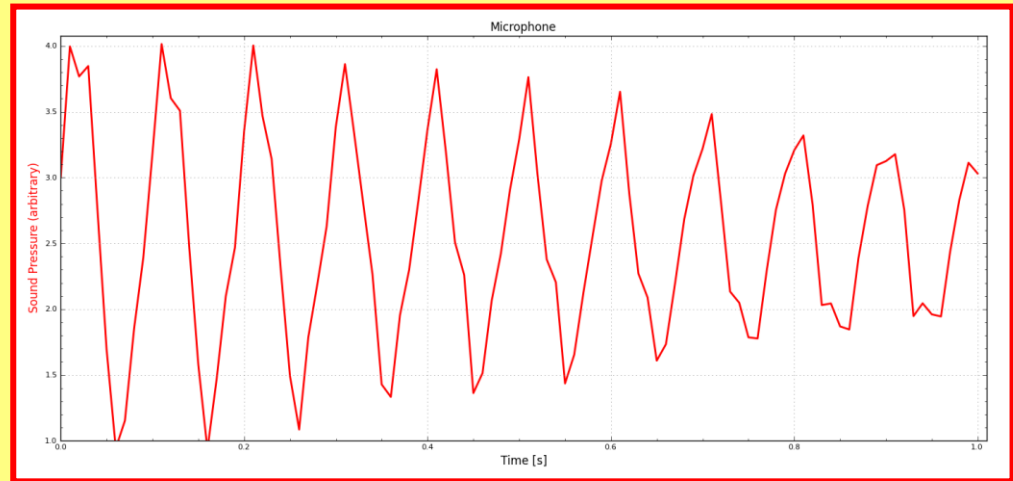
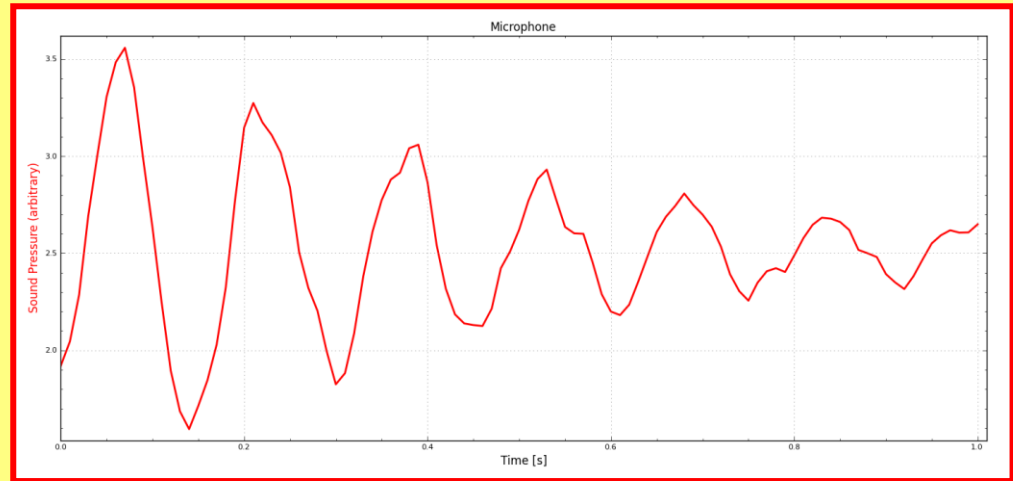
**Při tlumeném kmitání se**

- amplituda se zmenšuje
- perioda se zvětšuje

Kmitání reálného MO  
(vlastní kmitání)  
je vždy tlumené.

**Př.:**

Tlumiče náprav automobilů.  
Tlumení pohybu ruček  
měřicích přístrojů.



Tlumené kmitání struny kytary  
software EdLab čidlo - mikrofon

# 1. 9. NUCENÉ KMITÁNÍ

- vzniká působením vnější periodické síly na MO
- vzniká vazba
- MO nekmitá volně, je ovlivňován působením vnější síly
- vazbou se do MO přivádí energie

**Při nuceném kmitání kmitá oscilátor s frekvencí vnějšího působení.**

**Nucené kmitání je netlumené.**

Př.: Dítě na houpačce – je nutné nahrazovat ztráty.

## 1.10. REZONANCE MO

nastává, jestliže je úhlová frekvence nucených kmitů shodná s úhlovou frekvencí vlastních kmitů.

$$\omega = \omega_0$$

Amplituda dosáhne maxima a dochází k **rezonančnímu zesílení** nucených kmitů.

### Rezonanční křivka

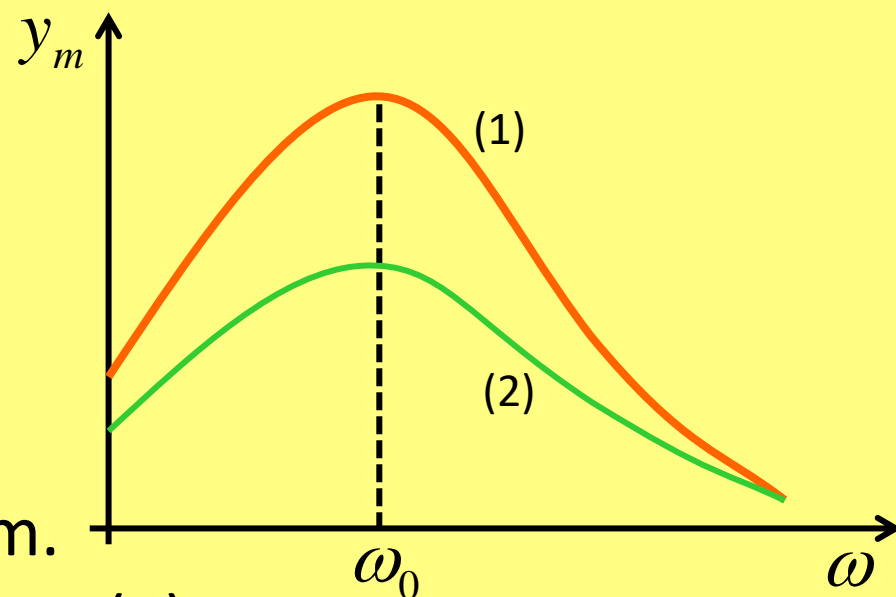
graf závislosti

amplitudy výchylky

na úhlové frekvenci

Tvar křivky je ovlivněn tlumením.

- malé tlumení – ostré maximum (1)
- větší tlumení – méně výrazné maximum (2)



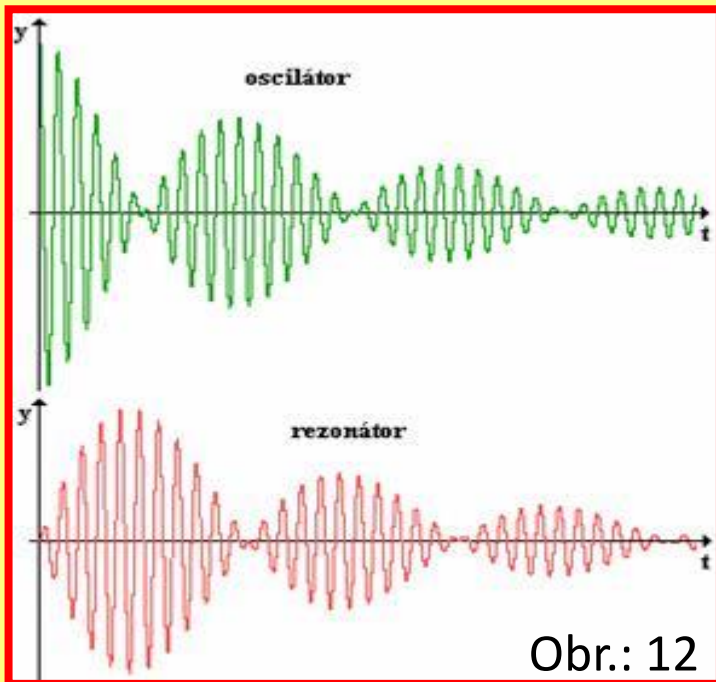
**Význam** – malou, periodicky působící silou, lze v oscilátoru vzbudit kmitání s velkou amplitudou. [MOST](#)

# 1.10. REZONANCE MO

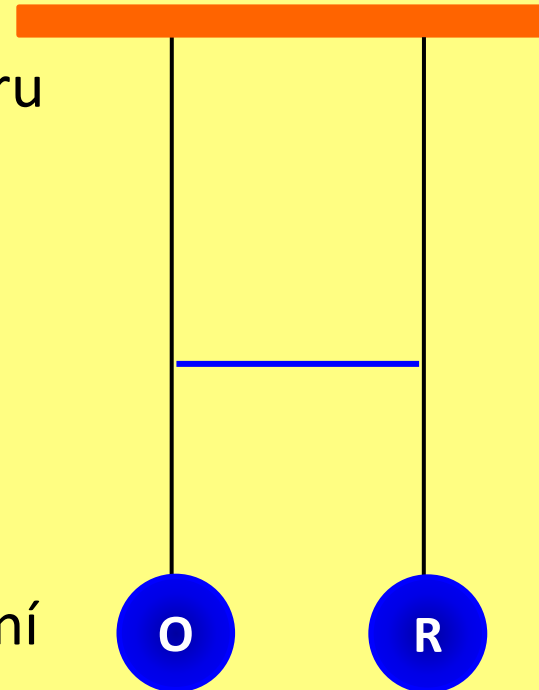
**Sprážená kyvadla** – soustava oscilátorů;

dvě závaží spojená vláknem nebo pružinou, kterou se vytváří vazba a umožňuje přenos energie mezi

- oscilátorem – zdrojem nuceného kmitání
- rezonátorem – který se nuceně rozkmitá.



Po rozkmitání oscilátoru se výchylka postupně zmenšuje a zároveň se zvětšuje výchylka rezonátoru, jehož amplituda dosáhne maxima v okamžiku, kdy kmitání oscilátoru ustalo.





## 1.10. REZONANCE MO

Mezi oscilátory může být:

- vazba volná - energie přechází z oscilátoru na rezonátor dlouho
- vazba těsná - vzájemné působení je silné, přenos energie je rychlý

**Praktické využití** rezonance spočívá v rezonančním zesilování.

- chvění struny se přenáší na tělo nástroje a dochází k rezonančnímu zesílení
- dutiny uší
- bezdrátová komunikace – rezonance elektrických kmitů

# 1.10. REZONANCE MO

## Nežádoucí rezonanční zesílení

- pochod přes most,
- přelet letadla – drnčení oken,
- rozkmitání celého stroje, jehož části se otáčí, .... (pračka)

## Tomu lze předcházet:

1. změnou vlastní frekvence mechanismu
2. doplněním mechanismu tlumičem kmitání
3. zvětšení tření mechanismu

# Použitá literatura

## Literatura

BARTUŠKA, K., SVOBODA, E. *Molekulová fyzika a termika, Fyzika pro gymnázia*. Praha: Prometheus, 2006.

ISBN 80-7196-200-7

LEPIL, O. *Mechanické kmitání a vlnění, Fyzika pro gymnázia*. Prometheus, Praha 2004

ISBN

LEPIL, O. *Sbírka úloh pro střední školy. Fyzika* Praha: Prometheus, 2010.

ISBN 978-80-7196-266-3

NAHODIL, J. *Fyzika v běžném životě*. Praha: Prometheus, 2010.

ISBN 80-7196-005-5

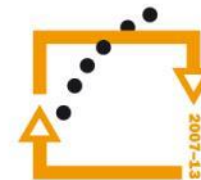
# Použitá literatura

Obrázky:

- [1] *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-01-27]. Dostupné z: [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/24/Oscillating\\_pendulum.gif](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/24/Oscillating_pendulum.gif)
- [2] [online]. [cit. 2013-01-26]. Dostupné z: <http://www.offroad-obchod.cz/data/l/vinuta-pruzina-3.jpg>
- [3] *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-01-27]. Dostupné z: [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2d/Heart\\_diastole.png](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2d/Heart_diastole.png)
- [4] *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-01-27]. Dostupné z: [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6f/Heart\\_systole.png](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6f/Heart_systole.png)
- [5] *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-01-27]. Dostupné z: [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b8/Opposite\\_piston\\_engine\\_anim.gif](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b8/Opposite_piston_engine_anim.gif)
- [6] *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-01-20]. Dostupné z: [http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Foucault\\_pendulum\\_animated.gif](http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Foucault_pendulum_animated.gif)
- [7] *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-02-04]. Dostupné z: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0f/Foucault-anim.gif>
- [8] *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-02-04]. Dostupné z: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Foucault-rotz.gif>
- [9] *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-02-04]. Dostupné z: [http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Ballistic\\_pendulum.svg](http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Ballistic_pendulum.svg)
- [10] *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-02-04]. Dostupné z: [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a4/Christiaan\\_Huygens-painting.jpeg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a4/Christiaan_Huygens-painting.jpeg)
- [11] [online]. [cit. 2013-02-04]. Dostupné z: <http://fyzmatik.pise.cz/img/138754.jpg>
- [12] Lissajousovy obrazce a Blackburnovo kyvadlo. In: [online]. [cit. 2013-02-04]. Dostupné z: <http://fyzmatik.pise.cz/img/138753.jpg>
- [13] [online]. [cit. 2013-02-04]. Dostupné z: <http://fyzmatik.pise.cz/img/179114.jpg>



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



**OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost**

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tato prezentace vznikla na základě řešení projektu OPVK, registrační číslo: CZ.1.07/1.1.24/01.0114  
s názvem  
„PODPORA CHEMICKÉHO A FYZIKÁLNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ NA GYMNÁZIUMU KOMENSKÉHO V HAVÍŘOVĚ“

**Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.**