FYZIKA PRO I. ROČNÍK GYMNÁZIA

GRAVITAČNÍ POLE

Mgr. Monika Bouchalová
Gymnázium, Havířov-Město, Komenského 2, p.o.

GRAVITAČNÍ POLE

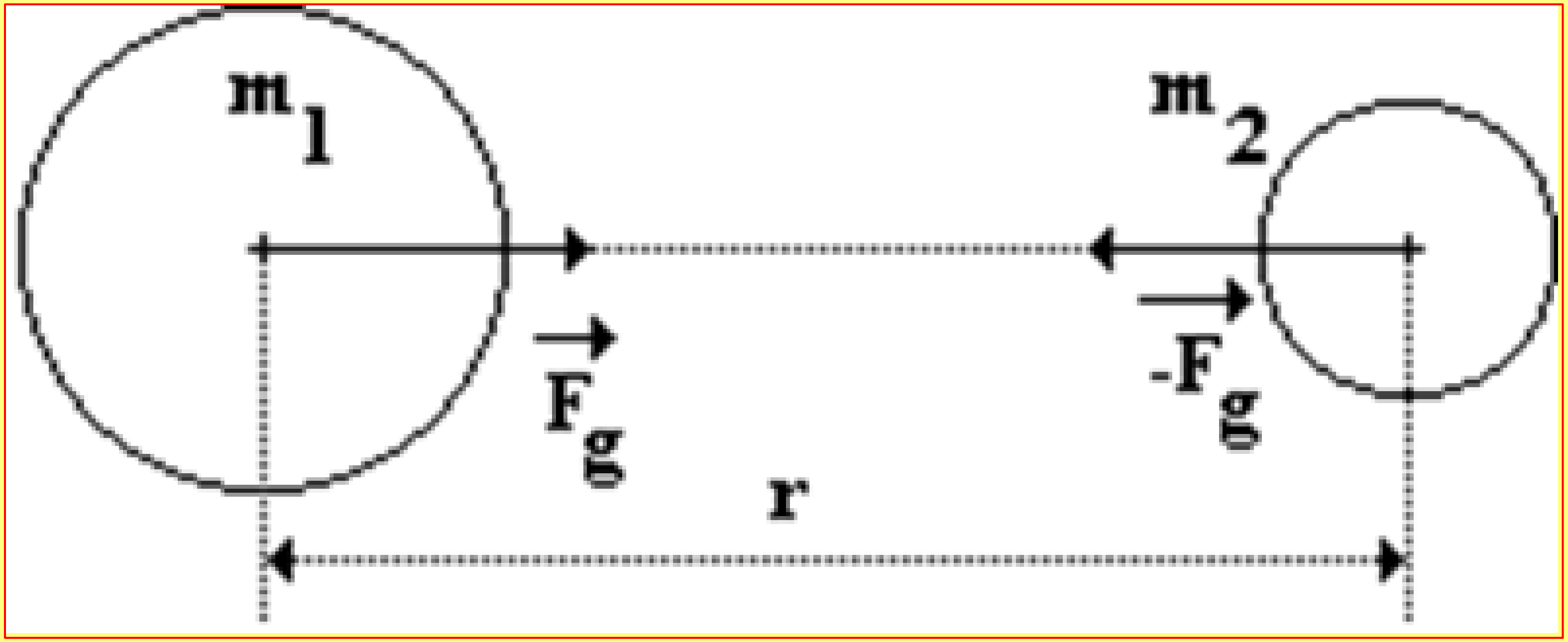
- existuje v okolí každého tělesa
- projevuje se silovým působením na jiná tělesa

- Příčinou je gravitační síla, kterou země působí na tělesa.
- (GRAVIS = latinsky těžký)

- Gravitační pole mají všechny hmotné objekty.
- Gravitační silové působení je vzájemné – akce a reakce.

5.1. NEWTONŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON

- 17. stol – **ISAAC NEWTON**
- Pozorováním Měsíce, Slunce a planet → příčinou pohybu jsou gravitační síly.



$$F_g = \chi \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

5.1. NEWTONŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON

Každá dvě tělesa se navzájem přitahují stejně velkými gravitačními silami $\mathbf{F_g}$ a $-\mathbf{F_g}$ opačného směru.

Velikost gravitační síly pro dvě stejnorodá tělesa tvaru koule je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti jejich středů.

$$F_g = \chi \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- gravitační konstanta

$\chi = 6{,}67.10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$

Gravitační síla je vždy přitažlivá.

5.2. GRAVITAČNÍ ZRYCHLENÍ

Př.: Těleso o hmotnosti m ve vzdálenosti h nad povrchem Země.

2.NPZ

$$F = m.a \Rightarrow a = \frac{F}{m}$$

$$F_g = \chi \frac{M_Z m}{r^2}$$

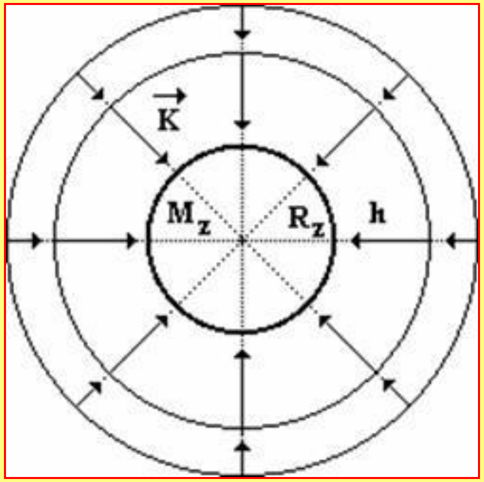
$$a_g = \frac{F_g}{m} = \chi \frac{M_Z}{r^2}$$

Gravitační zrychlení

je zrychlení, které tělesu uděluje gravitační síla.

$$r = R_Z + h$$

s rostoucí nadmořskou výškou klesá



Intenzita gravitačního pole K

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

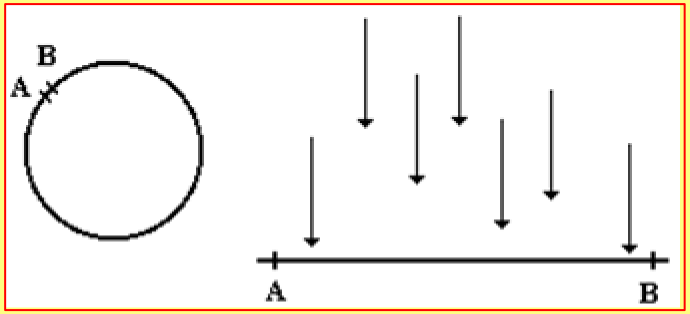
$$[K] = N.m^{-1}$$

- je podíl gravitační síly, která v daném místě působí na HB, a hmotností tohoto bodu.
- charakterizuje gravitační pole v daném místě,
- vektorová veličina, má stejný směr jako $\mathbf{F_g}$, $\mathbf{a_g}$

5.2. GRAVITAČNÍ ZRYCHLENÍ

CENTRÁLNÍ (radiální) GRAVITAČNÍ POLE

- $\mathbf{F_g}$ **, K,** $\mathbf{a_g}$ – míří vždy do středu tělesa
- ve všech bodech ležících v téže vzdálenosti od středu má $\mathbf{F_g}$**,** $\mathbf{a_g}$ i **K** stejnou velikost
- vzniká kolem každého stejnorodého tělesa tvaru koule a v okolí hmotného bodu
- centrální gr. pole je okolo Země, kterou lze považovat za stejnorodou kouli



HOMOGENNÍ GRAVITAČNÍ POLE

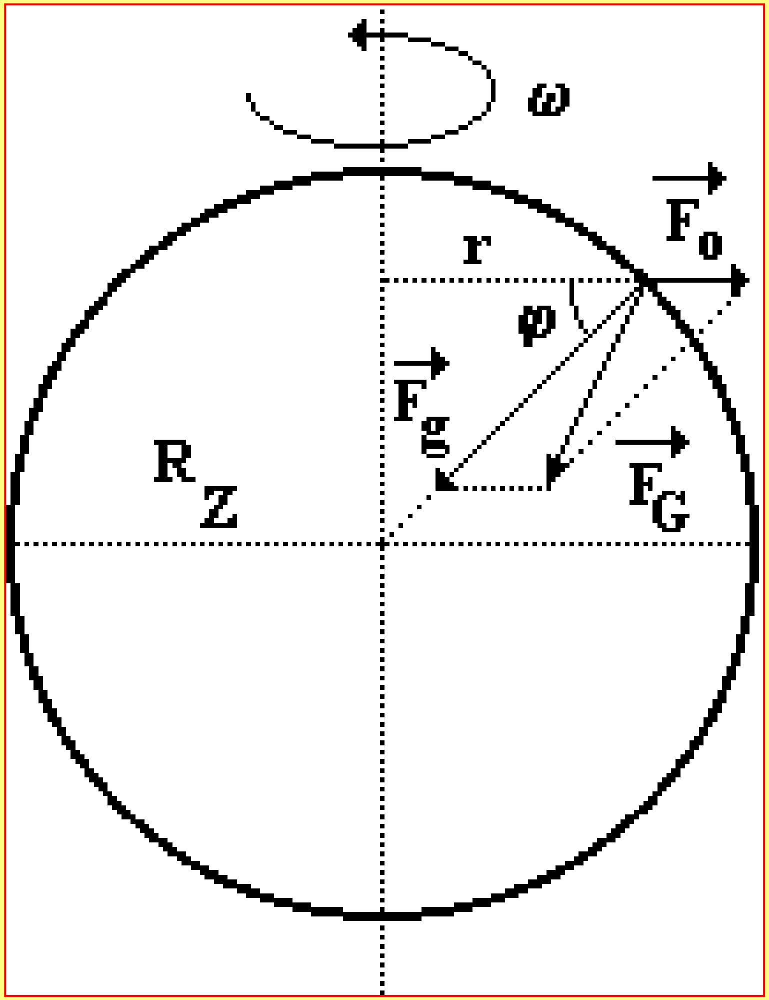
- $\mathbf{F_g}$**,** $\mathbf{a_g}$ i **K** jsou konstantní mají stejný směr i velikost
- je speciálním případem centrálního gravitačního pole

5. 3. TÍHOVÉ ZRYCHLENÍ PŘI POVRCHU ZEMĚ

Země se otáčí – je to NVS.

Na těleso na povrchu Země působí

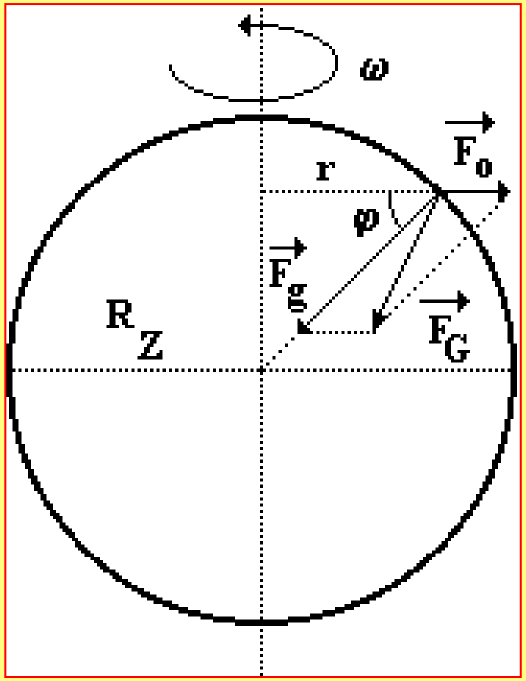
- **gravitační síla F_g**
  - směr do středu Země
  - velikost konstantní
- **setrvačná odstředivá síla F_s**
  - směr kolmý k ose otáčení
  - velikost
    - max. na rovníku
    - 0 na pólech



5. 3. TÍHOVÉ ZRYCHLENÍ PŘI POVRCHU ZEMĚ

Tíhová síla F_G je vektorovým součtem gravitační a setrvačné odstředivé síly.

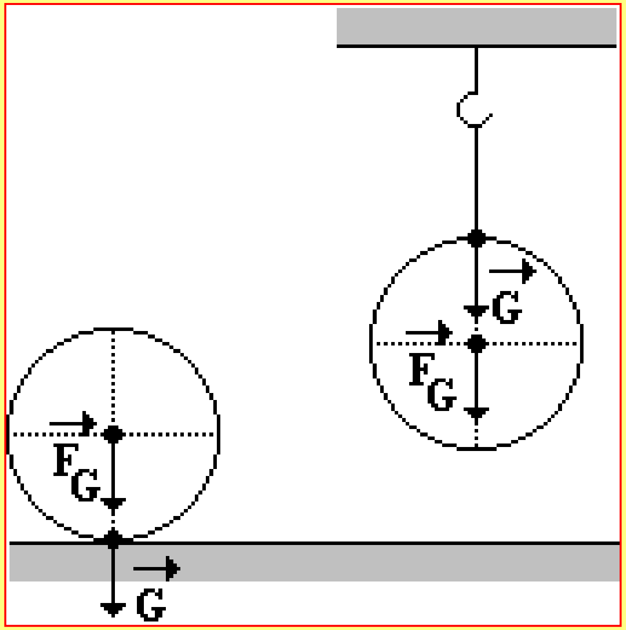
- směr svislý určujeme olovnicí
- velikost
  - max. na pólech (g = 9,83 m.s^{-2})
  - min. na rovníku (g = 9,78 m.s^{-2})
  - u nás (g = 9,81 m.s^{-2})



Tíhové pole je prostor při povrchu Země, v němž se projevují účinky tíhové síly.

Homogenní tíhové pole je oblast tíhového pole Země, kde jsou odchylky $\mathbf{F_G}$ tak malé, že tíhové zrychlení **g** můžeme považovat za konstantní.

5. 4. TÍHOVÁ SÍLA A TÍHA TĚLESA



tíha tělesa G

- je důsledek působení těles
  v tíhovém poli Země na jiná tělesa
- projevuje se jako
  tahová nebo tlaková síla
- působiště:
  ve stykové ploše nebo v bodě závěsu

tíhová síla F_G

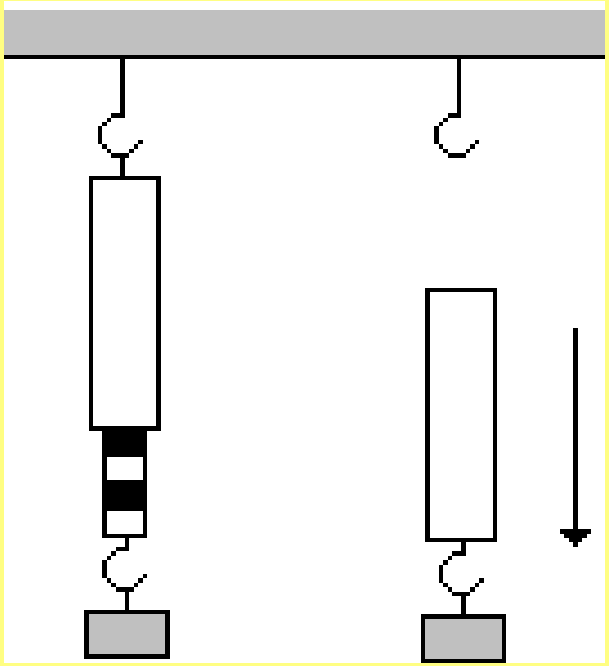
- vzniká působením tíhového pole Země na tělesa
- působiště – v těžišti

G a F_G jsou různé veličiny,
ale obě mají původ v tíhovém poli Země.

5. 4. TÍHOVÁ SÍLA A TÍHA TĚLESA

Těleso je ve stavu tíže,
projevuje-li se účinek tahové či tlakové síly na jiná tělesa.

Beztížný stav = volný pád



- tíha volně padajícího tělesa je rovna 0.
- tíhová síla působí stále a uděluje tíhové zrychlení

TABULKA

	Průměrná vzdálenost od Slunce AU 1 AU = 149,6.10^6 km	Hmotnost (Země=1) $M_Z = 6.10^{24}$kg
Slunce	0	332 800
Merkur	0,39	0,05
Venuše	0,72	0,89
Země	1,0	1,00
Mars	1,5	0,11

5. 5. POHYBY TĚLES V HOMOGENNÍM TÍHOVÉM POLI ZEMĚ

Na těleso

- působí tíhová síla $\mathbf{F_G}$
- nepůsobí odporové síly (těleso ve vakuu)

1. VOLNÝ PÁD

- rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb svisle dolů

$\mathbf{v_0} = 0$

$\mathbf{g} =$ konst.

$$\boxed{\begin{aligned} v &= gt \\ s &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}}$$

Další pohyby jsou složené = VRHY z

- rovnoměrně přímočarého pohybu ve směru počáteční rychlosti $\mathbf{v_0}$
- volného pádu se zrychlením $\mathbf{g}$

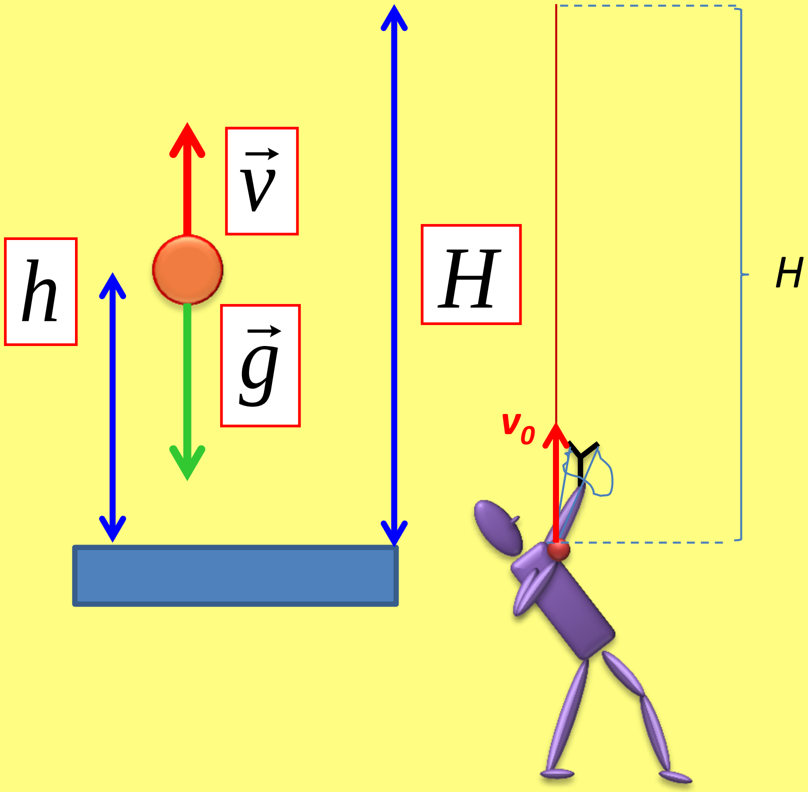
2. VRH SVISLÝ VZHŮRU

pohyb složený z

- volného pádu a
- rovnoměrně přímočarého pohybu směrem svisle vzhůru

popis pohybu

  - rovnoměrně zpomalený
  - zastaví se
  - padá volným pádem



- **v_0** má opačný směr než **g**
- **trajektorií** je svislá přímka

2. VRH SVISLÝ VZHŮRU

- **velikost okamžité rychlosti**

$$\boxed{v = v_0 - gt}$$

- **okamžitá výška h**

$$\boxed{h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2}$$

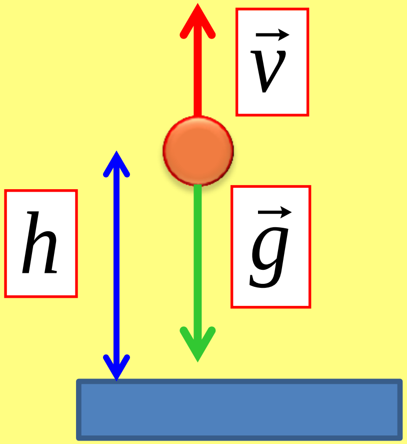
- **doba výstupu t_h = době pádu**

$$\boxed{H = v_0 t_h - \frac{1}{2} g t_h^2}$$

$$v = v_0 - gt$$

$$0 = v_0 - g t_h$$

$$t_h = \frac{v_0}{g}$$



$$H = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2}$$

$$H = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g}$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g}$$

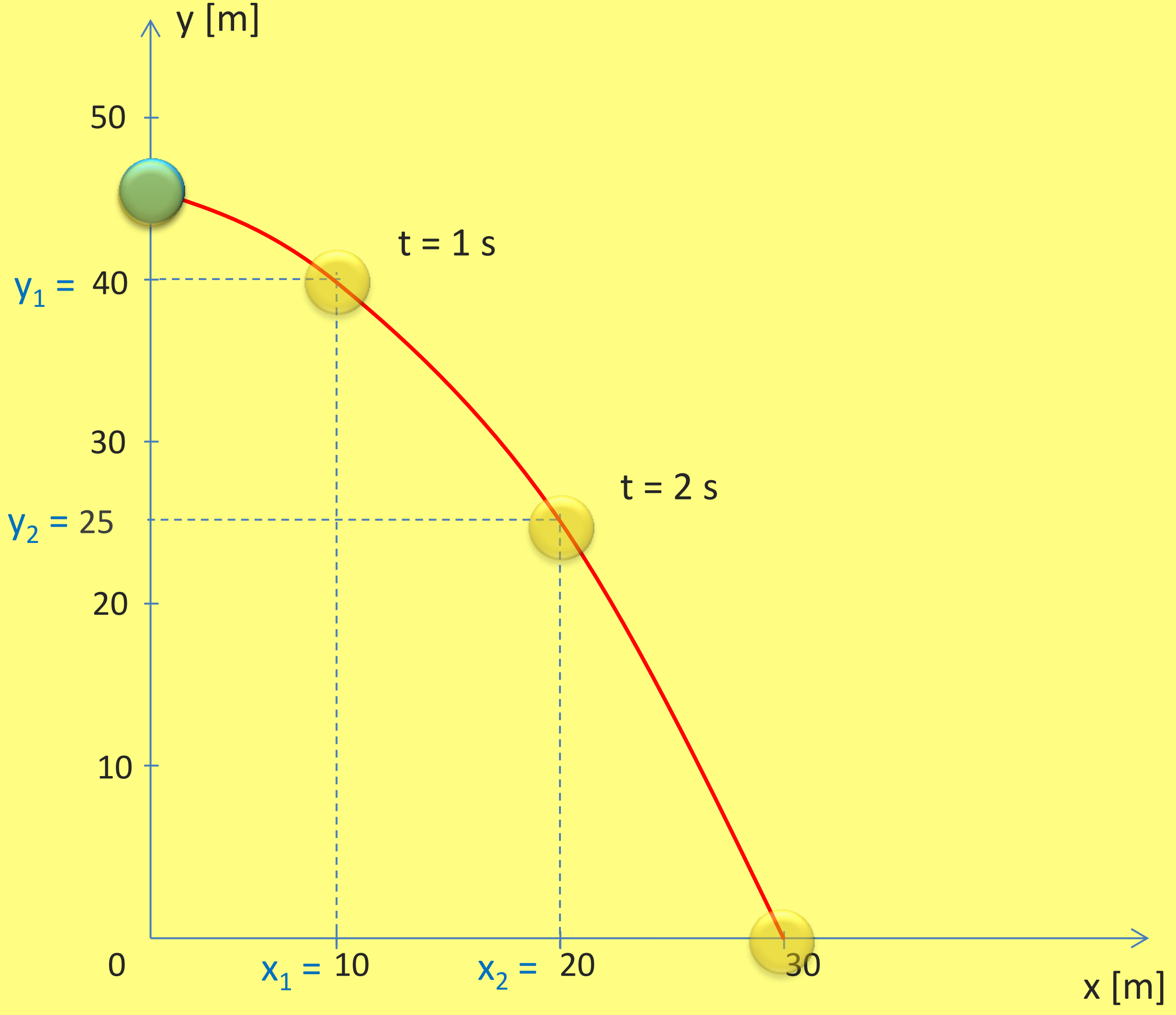
- **výška vrhu H** – maximální výška, které těleso dosáhne
- **rychlost dopadu = počáteční rychlosti**

2. VRH VODOROVNÝ

pohyb složený z

- volného pádu a
- rovnoměrně přímočarého pohybu směrem vodorovným

- **trajektorie** část paraboly s vrcholem v místě vrhu

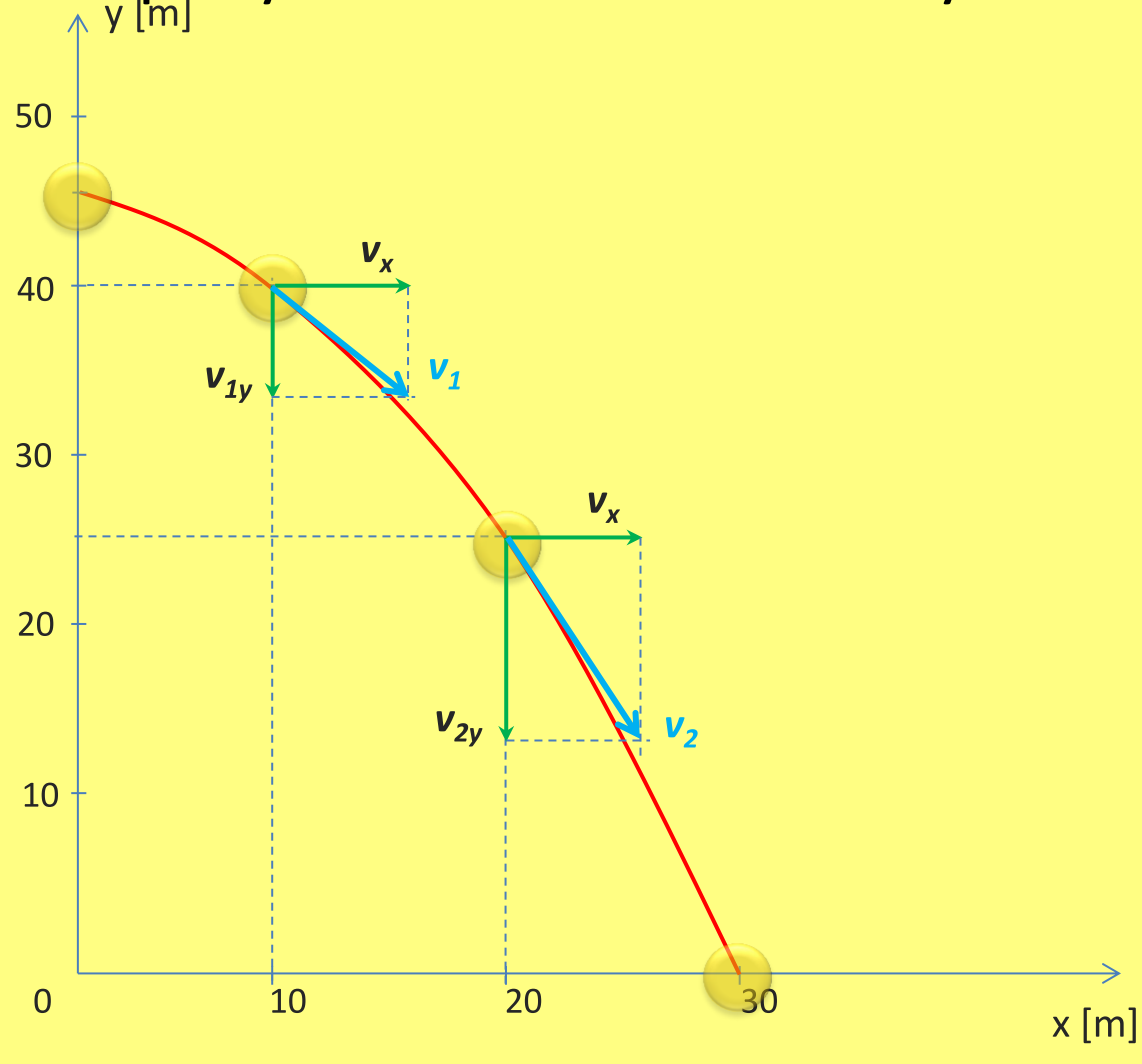


2. VRH VODOROVNÝ

pohyb složený z

- volného pádu a
- rovnoměrně přímočarého pohybu směrem vodorovným

- **trajektorie**
  část paraboly
  s vrcholem
  v místě vrhu



2. VRH VODOROVNÝ

poloha bodu

$$x = v_0 t$$

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

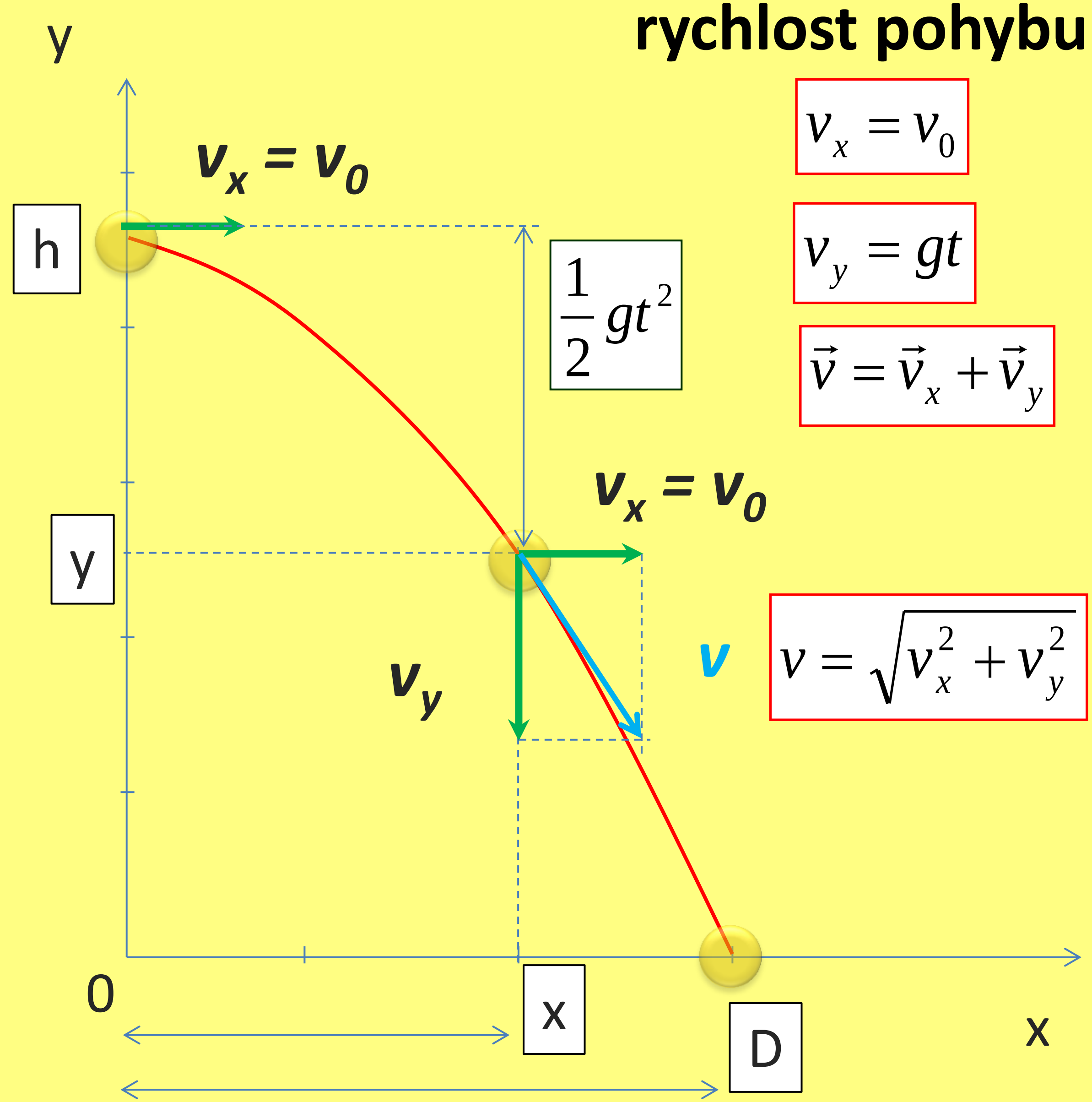
doba vrhu

$$0 = h - \frac{1}{2} g t_h^2$$

$$t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

délka vrhu

$$D = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$



rychlost pohybu

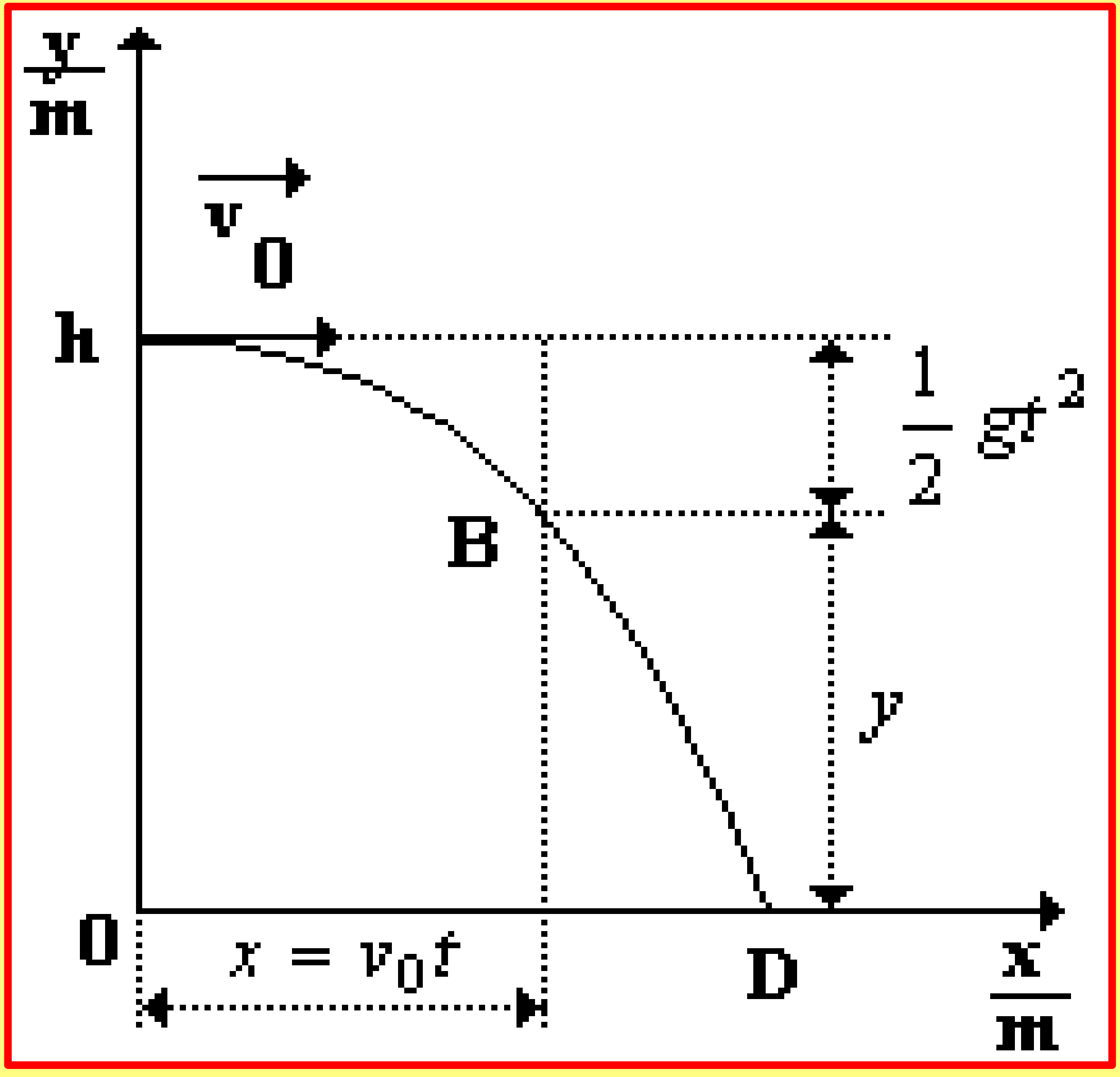
$$v_x = v_0$$

$$v_y = g t$$

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

2. VRH VODOROVNÝ

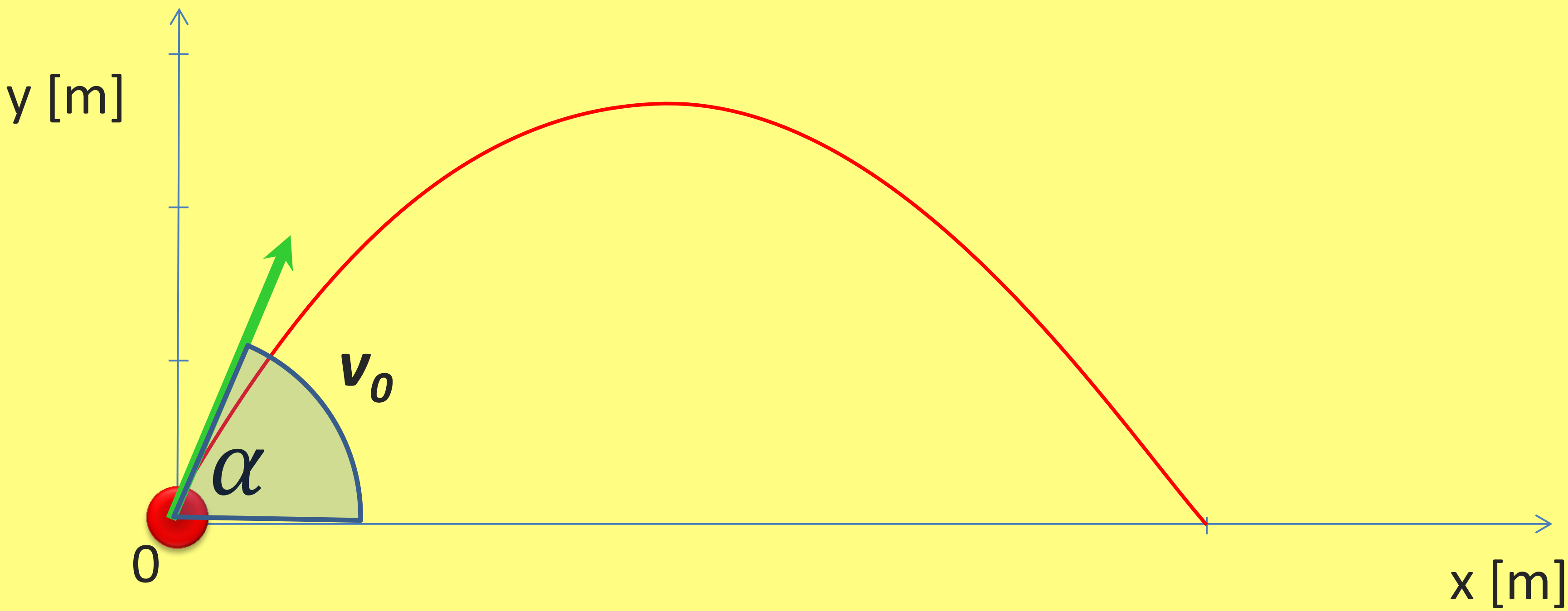


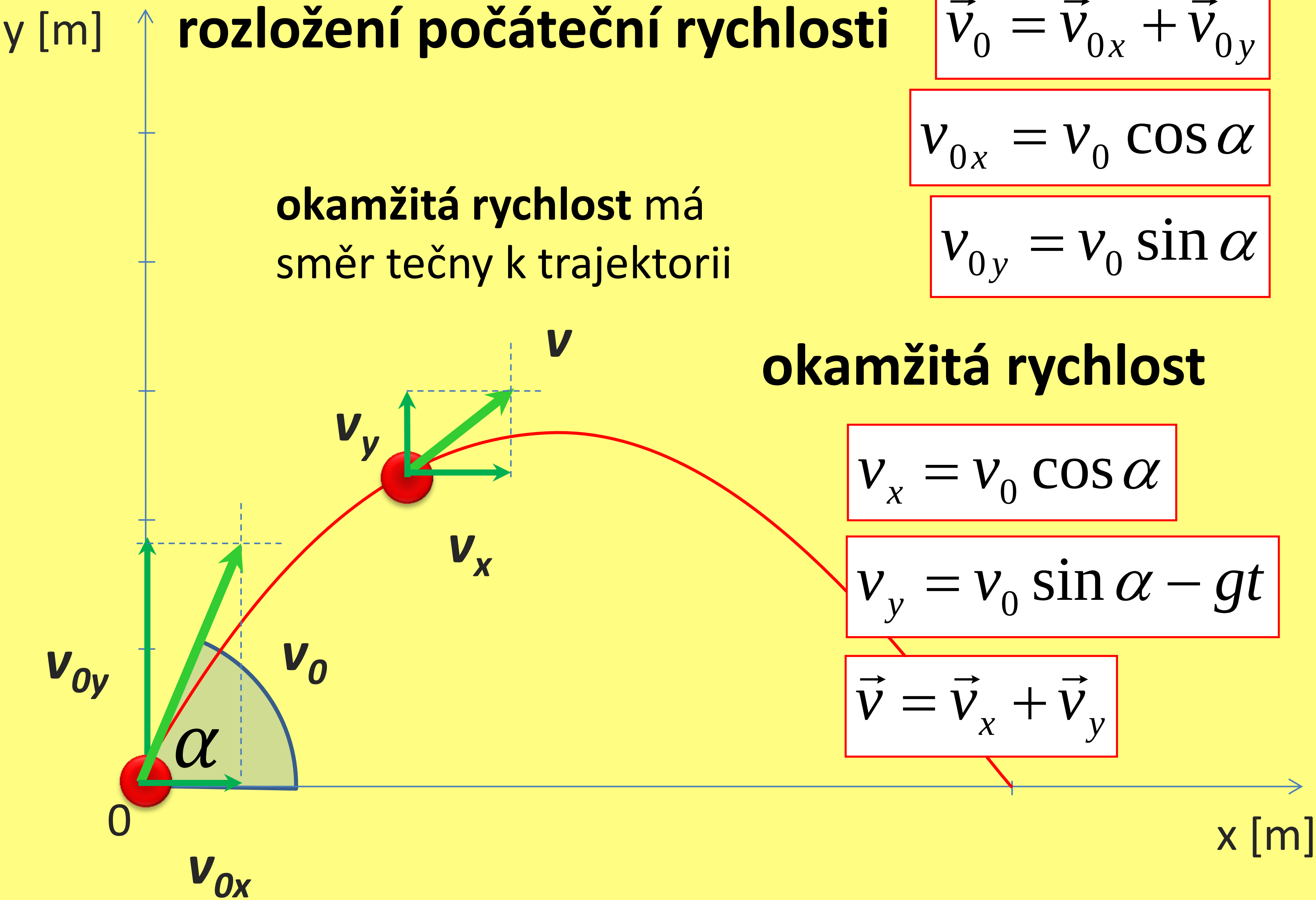
3. VRH ŠIKMÝ VZHŮRU

pohyb složený z

- volného pádu a
- rovnoměrně přímočarého pohybu ve směru počáteční rychlosti, která svírá s vodorovnou rovinou **elevační úhel α**

trajektorie – parabola s vrcholem v nejvyšším bodě trajektorie (H)





rozložení počáteční rychlosti

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

okamžitá rychlost má směr tečny k trajektorii

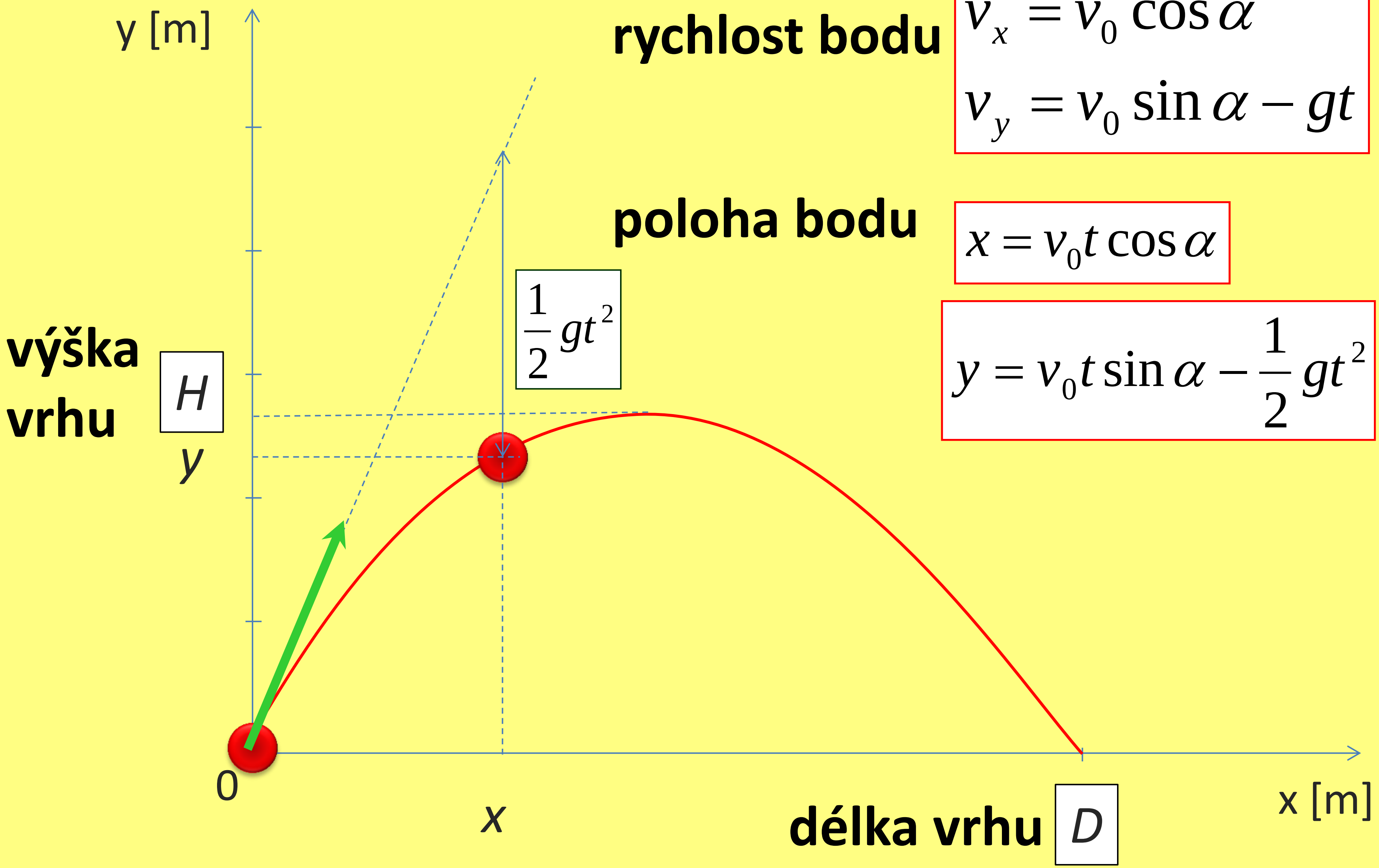
okamžitá rychlost

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

3. VRH ŠIKMÝ VZHŮRU



rychlost bodu

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

poloha bodu

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

3. VRH ŠIKMÝ VZHŮRU

čas dopadu $\boxed{y = 0}$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = v_0 t_d \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_d^{\,2}$$

$$\frac{1}{2} g t_d = v_0 \sin\alpha$$

$$t_d = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

délka vrhu = dostřel

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$D = v_0 t_d \cos\alpha$$

$$D = v_0 \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \cos\alpha$$

$$2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$D_{\max} \Leftrightarrow \alpha = 45^0$$

$$D_{45^0} = \max$$

3. VRH ŠIKMÝ VZHŮRU

výška výstupu

$$v_y = 0$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = v_0 \sin\alpha - gt$$

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$H = v_0 \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g} \right)^2$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

nebo

$$t = \frac{t_d}{2}$$

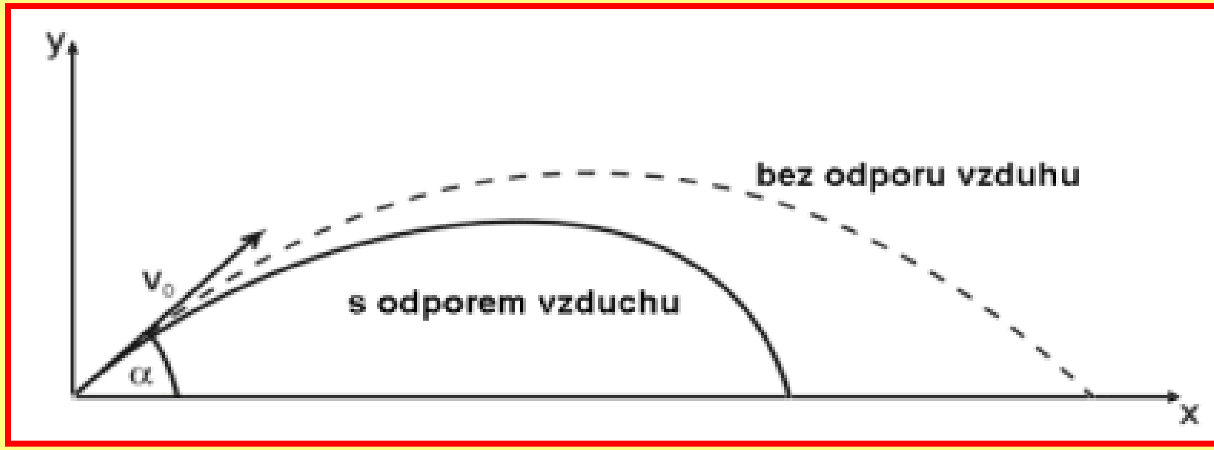
$$H = v_0 \frac{t_d}{2} \sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{t_d}{2} \right)^2$$

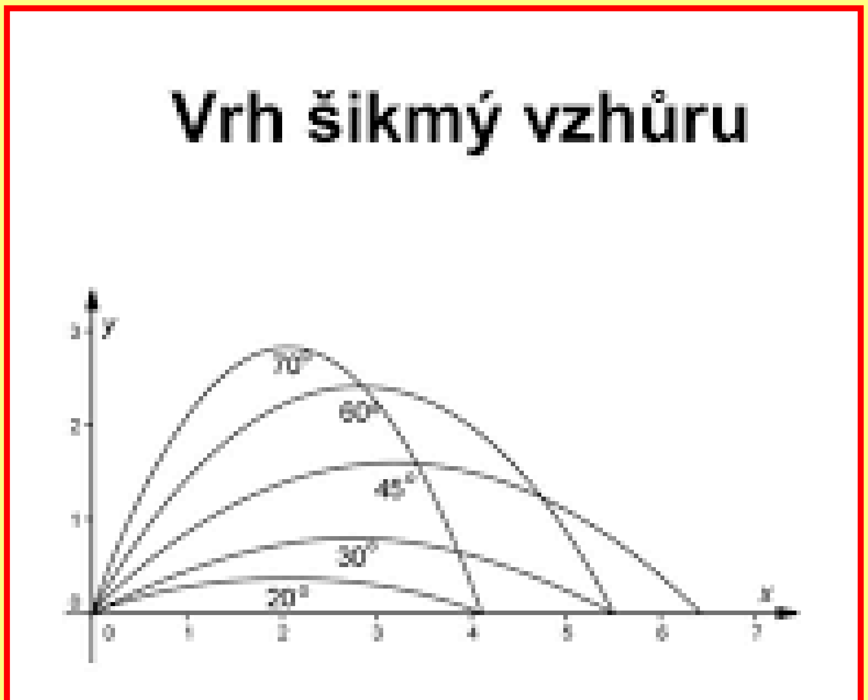
$$\boxed{H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

3. VRH ŠIKMÝ VZHŮRU

Počítáme-li s odporem vzduchu, mění se parabola v tzv. **balistickou křivku**.

(trajektorie šikmého vrhu nezanedbáme-li odpor vzduchu)

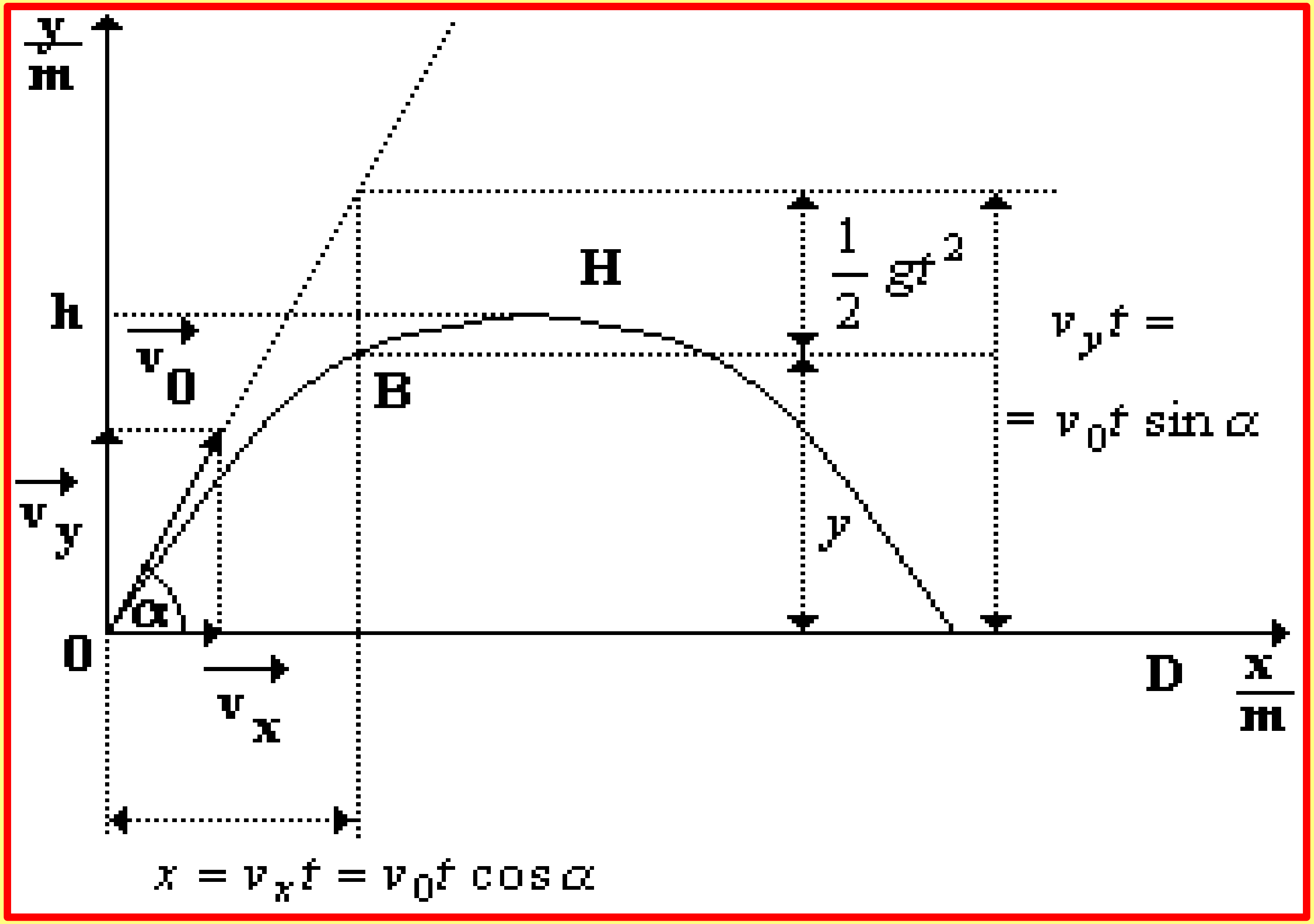




$$D_{30^0} = D_{60^0}$$
$$D_{20^0} = D_{70^0}$$

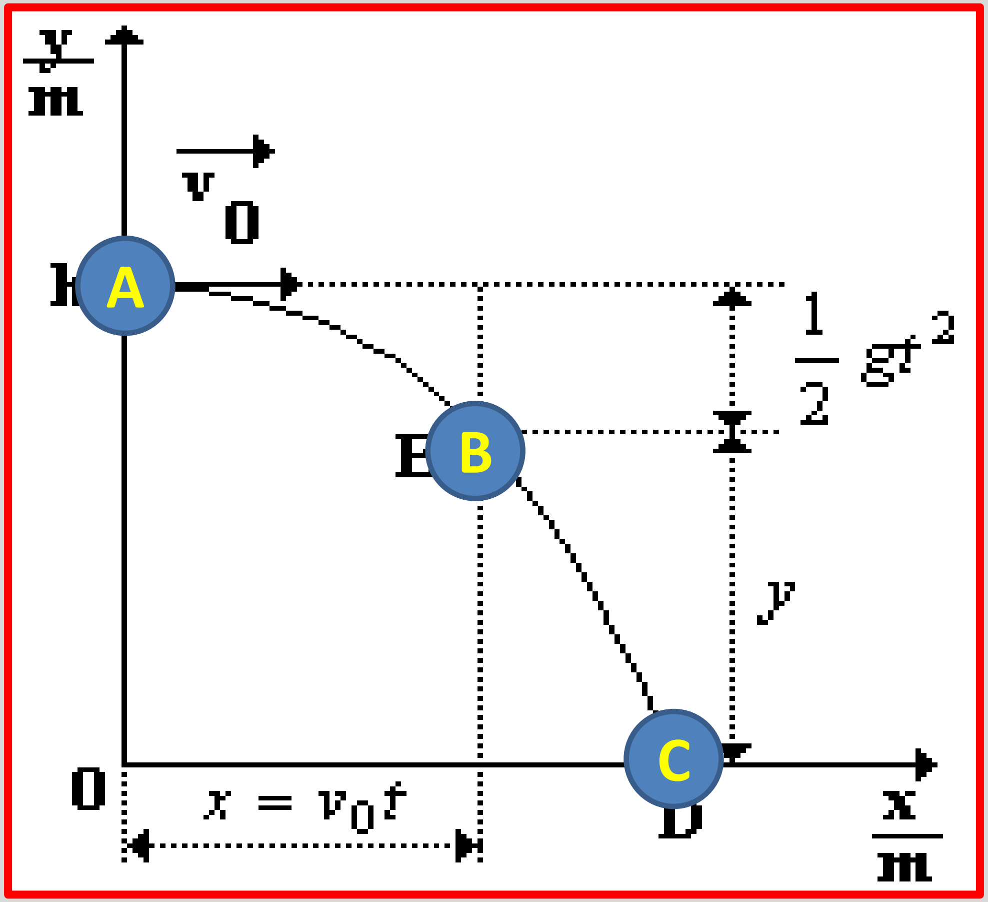
$$D_{30^0} < D_{40^0} < D_{45^0}$$
$$D_{70^0} < D_{55^0} < D_{45^0}$$

3. VRH ŠIKMÝ VZHŮRU



OTÁZKY

1. Jaký směr a velikost má
   a) v_x
   b) v_y
   c) okamžitá rychlost?
2. Jaký směr a velikost má síla působící na těleso?



5. 6. POHYBY TĚLES V CENTRÁLNÍM GRAVITAČNÍM POLI ZEMĚ

Gravitační pole Země nelze považovat za homogenní při popisu pohybu raket, družic, kosmických lodí …

M_z – hmotnost Země $5{,}98.10^{24}$ kg

R_Z – poloměr Země 6378 km

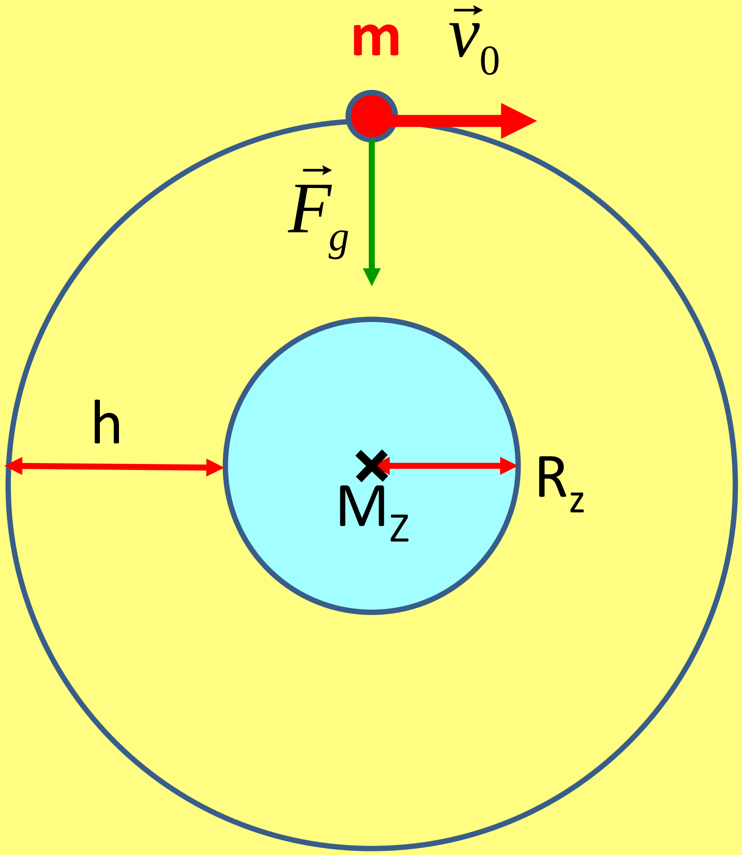
h – výška nad povrchem Země

m – hmotnost tělesa

$\mathbf{F_g}$ – směřuje do středu Země, (centrální GP)

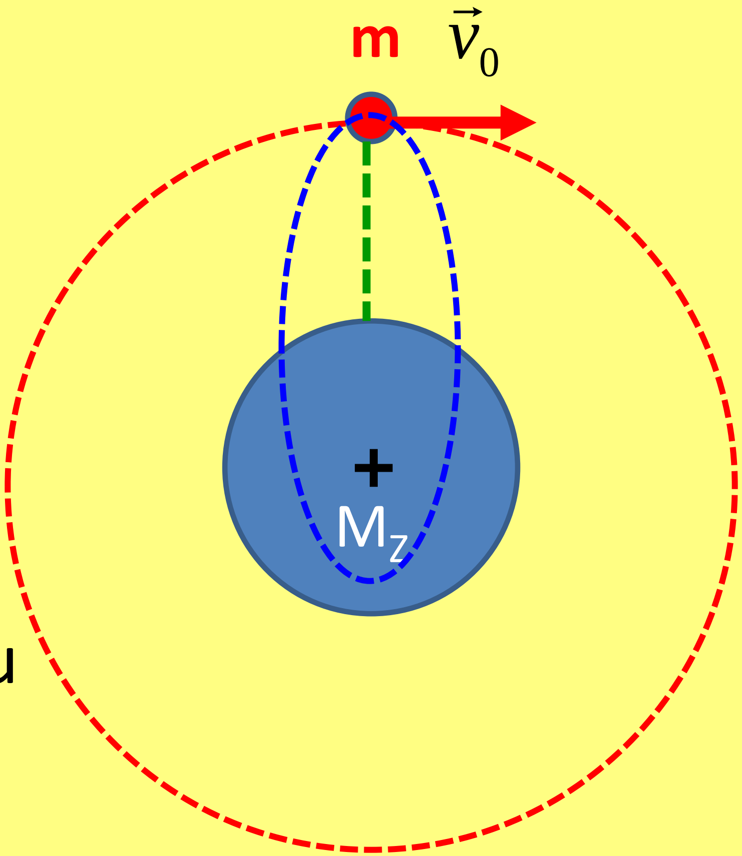
(zanedbáváme odporové síly vzduchu i gr. síly okolních těles)

$\mathbf{v_0}$ – počáteční rychlost tělesa



$$F_g = \chi \frac{mM_Z}{(R_Z + h)^2}$$

5. 6. POHYBY TĚLES V CENTRÁLNÍM GRAVITAČNÍM POLI ZEMĚ



1) v_0 = 0

- trajektorií je úsečka → volný pád

2) 0 < v_0 < v_k

- trajektorií je část elipsy,
- Země leží ve vzdálenějším ohnisku
- těleso dopadne na Zem

3) v_0 = v_k kruhová rychlost

- trajektorií je kružnice

3) $v_0 = v_k$ kruhová rychlost

- $\mathbf{F_g}$ směřuje do středu Země a vytváří dostředivou sílu $\mathbf{F_d}$, která způsobuje stálé zakřivení trajektorie do tvaru kružnice o poloměru $R_Z + h$

$$F_g = \chi \frac{mM_Z}{(R_Z + h)^2}$$

$$F_g = F_d$$

$$F_d = ma_d = m \frac{v^2}{R_Z + h}$$

$$\chi \frac{mM_Z}{(R_Z + h)^2} = \frac{mv^2}{R_Z + h}$$

$$\chi \frac{M_Z}{(R_Z + h)} = v^2$$

$$v_k = \sqrt{\frac{\chi M_Z}{R_Z + h}}$$

1. kosmická rychlost je rychlost, kterou musíme udělit tělesu v blízkosti povrchu Země, aby se kolem ní pohybovalo po kružnici.

$$v_k = \sqrt{\frac{\chi M_Z}{R_Z}}$$

$$v_k = 7{,}9 kms^{-1}$$

DÚ

- oběžná doba při 1. kosmické rychlosti T = 84,4 min

5. 6. POHYBY TĚLES V CENTRÁLNÍM GRAVITAČNÍM POLI ZEMĚ

4) $v_k < v_0 < v_p$

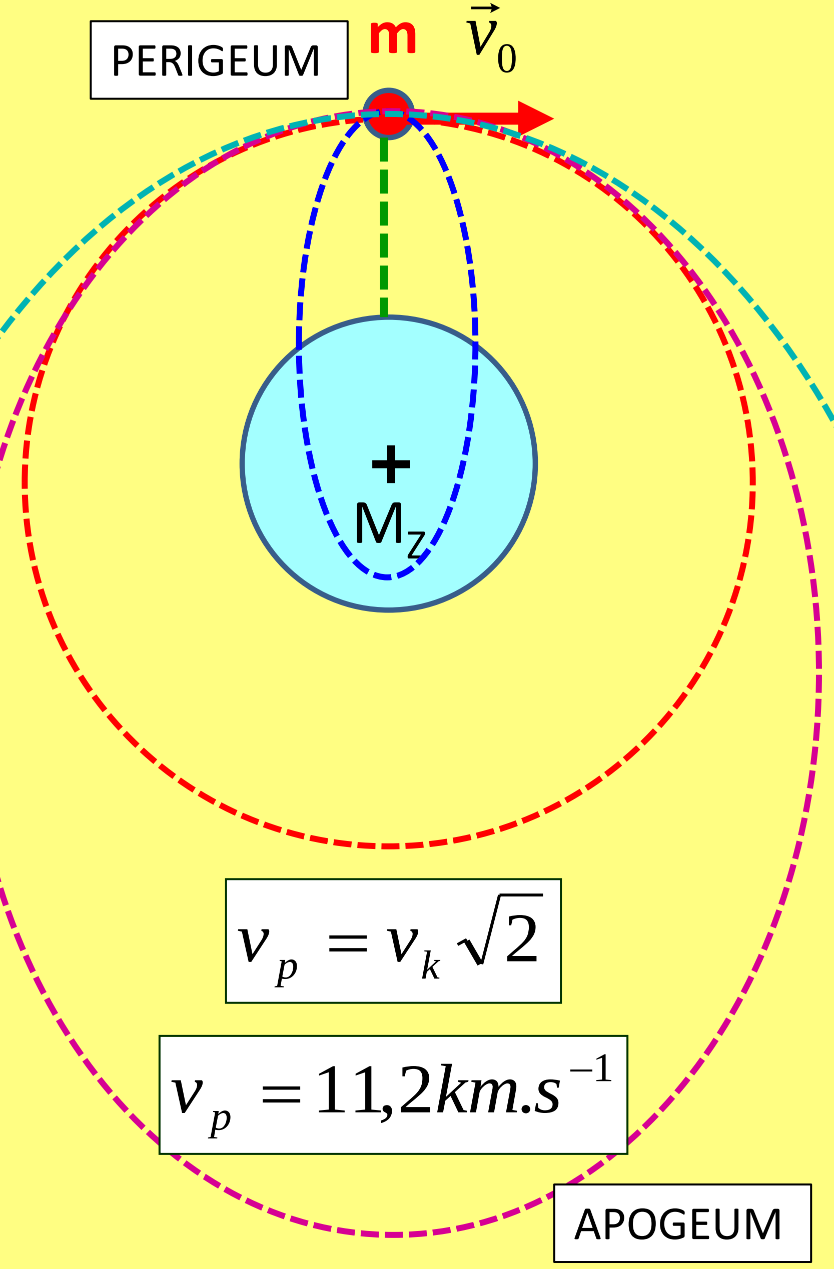
- trajektorií je elipsa, Země leží v bližším ohnisku

5) $v_0 = v_p$

parabolická – úniková rychlost

- trajektorií je parabola
- těleso se trvale vzdaluje od Země, zůstává v gravitačním poli Slunce

2. kosmická rychlost – rychlost, kterou musíme udělit tělesu v blízkosti povrchu Země, aby se od ní trvale vzdalovalo.



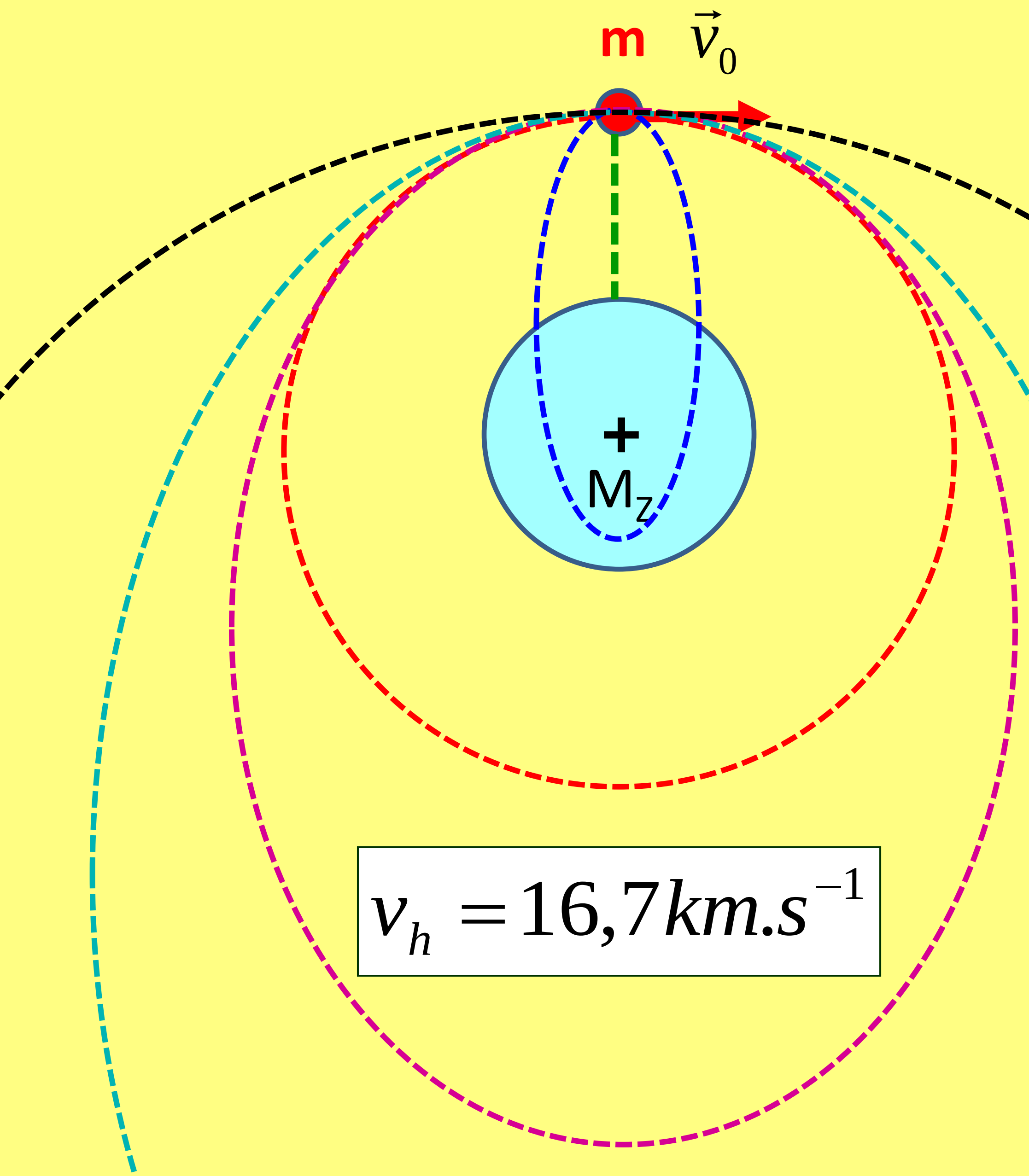
$$v_p = v_k \sqrt{2}$$

$$v_p = 11{,}2 km.s^{-1}$$

5) $v_0 = v_h$

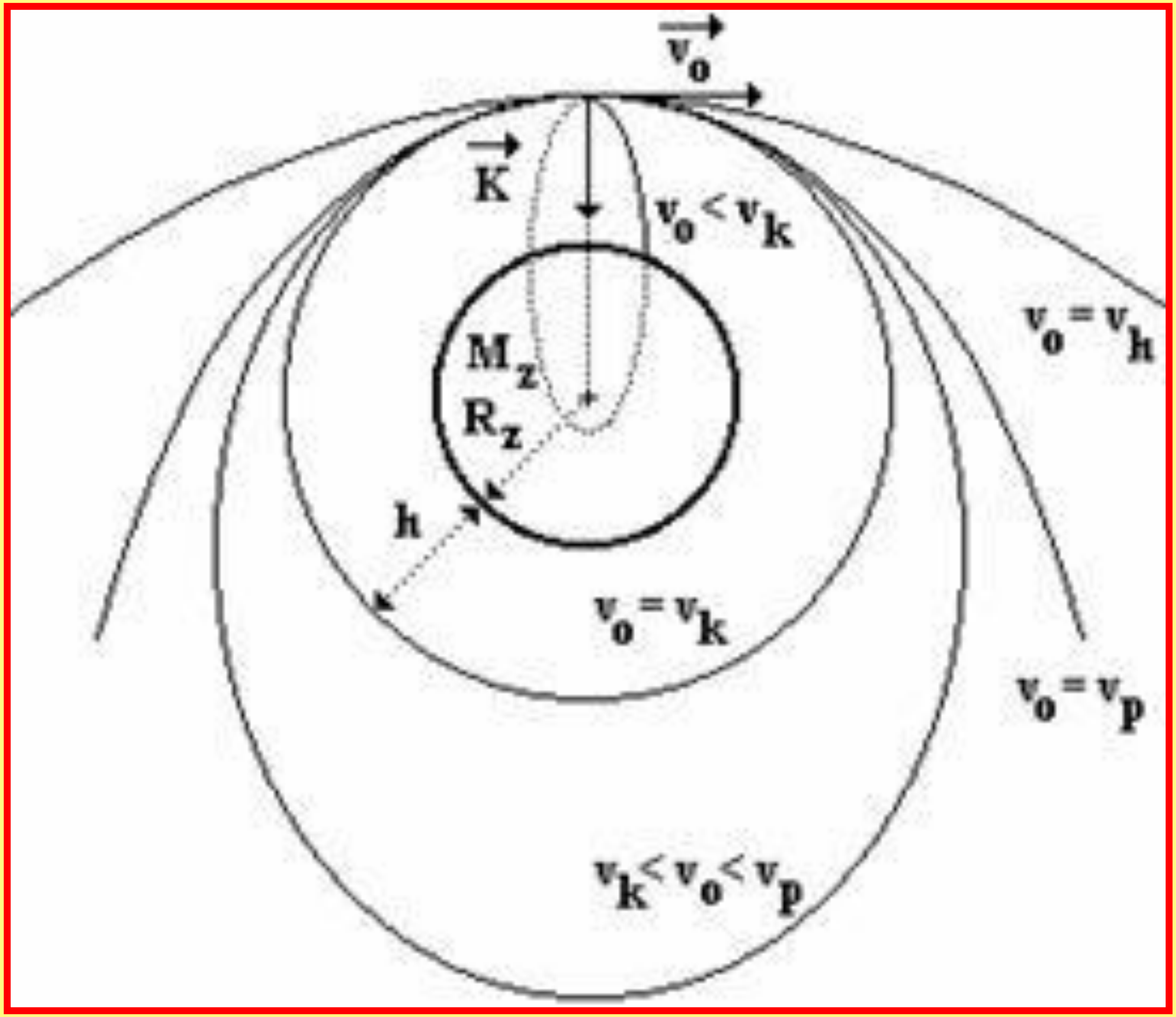
- trajektorií je hyperbola
- těleso opouští Sluneční soustavu

3. kosmická rychlost – rychlost, kterou musíme udělit tělesu v blízkosti povrchu ve směru otáčení Země, aby opustilo oblast přitažlivosti Slunce



$$v_h = 16{,}7\,km.s^{-1}$$

5. 6. POHYBY TĚLES V CENTRÁLNÍM GRAVITAČNÍM POLI ZEMĚ



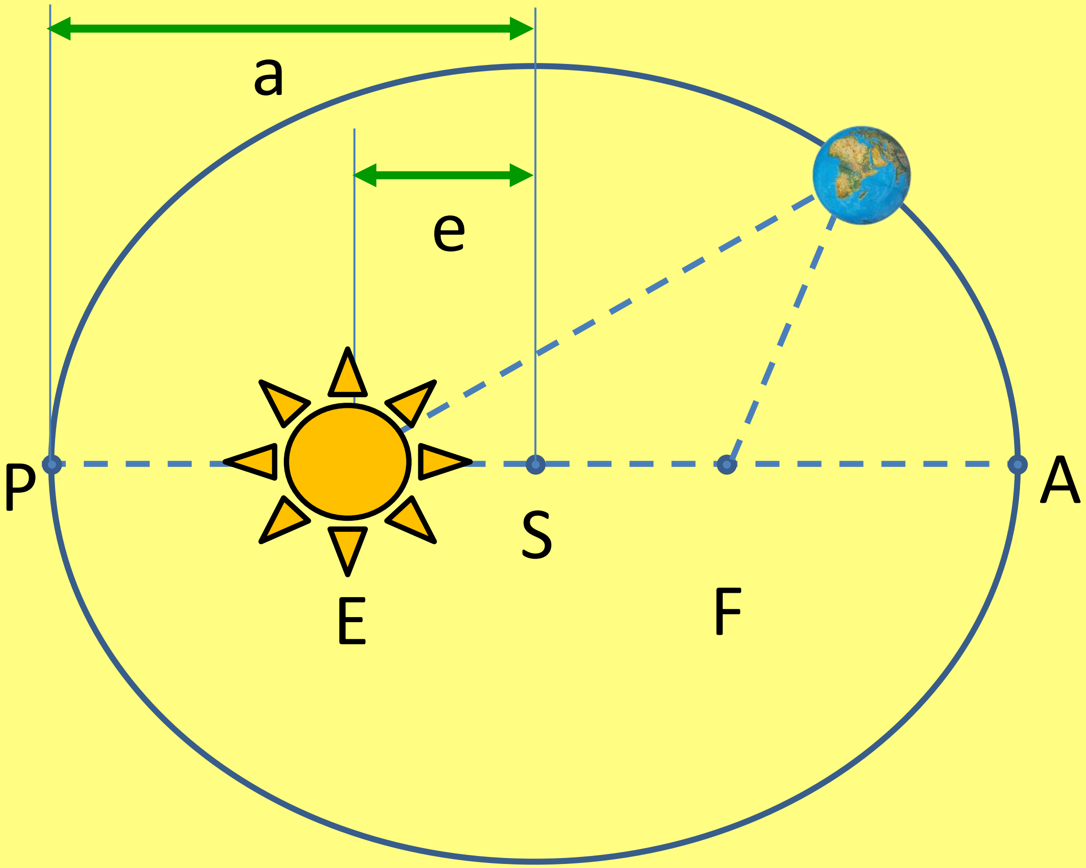
5.7. POHYBY TĚLES V GRAVITAČNÍM POLI SLUNCE

- gravitační pole Slunce >> gravitační pole Země
  $a_{gS} = 28\ a_{gZ} = 280\ m.s^{-2}$

- **geocentrický (zeměstředný) názor**
  Země se nachází ve středu vesmíru
  a všechna ostatní tělesa se pohybují kolem ní

- **heliocentrický (sluncestředný) názor**
  v centru se nachází Slunce a kolem něho se pohybují planety

ELIPSA



E, F - ohniska

S - střed elipsy

P – perihelium

A – afélium

(vrcholy elipsy)

a - hlavní poloosa

e - excentricita =

výstřednost elipsy

5.7. POHYBY TĚLES V GRAVITAČNÍM POLI SLUNCE

KEPLEROVY ZÁKONY – popisující pohyby planet

1. **Určuje tvar trajektorie.**
   Planety se pohybují po elipsách málo odlišných od kružnic;
   v jejichž společném ohnisku je Slunce.

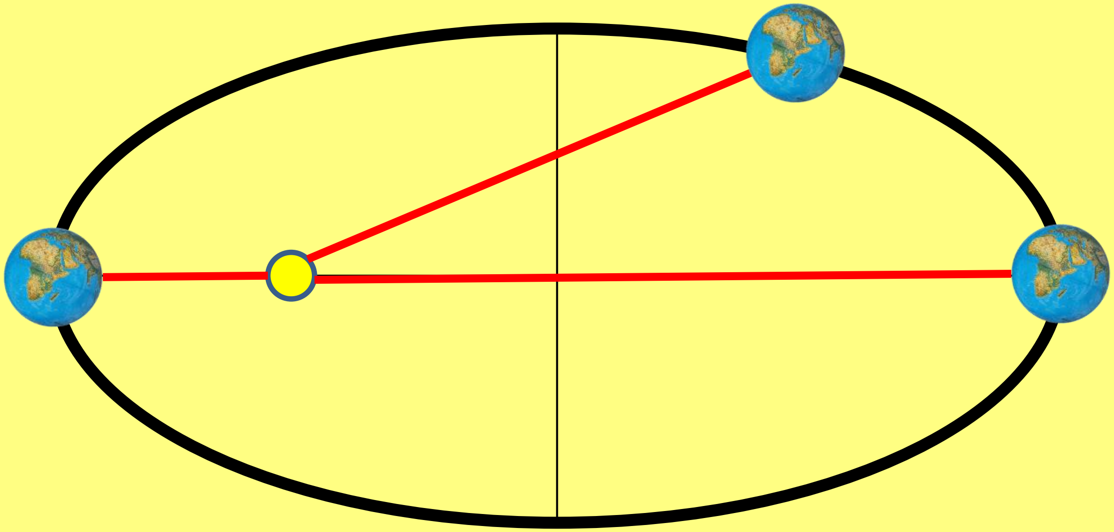
2.

Průvodič je úsečka spojující střed planety se středem Slunce.

perihélium – místo na trajektorii tělesa, kdy je těleso Slunci nejblíže

afélium – místo na trajektorii tělesa, kdy je těleso Slunci nejdále

Perihélium
- přísluní



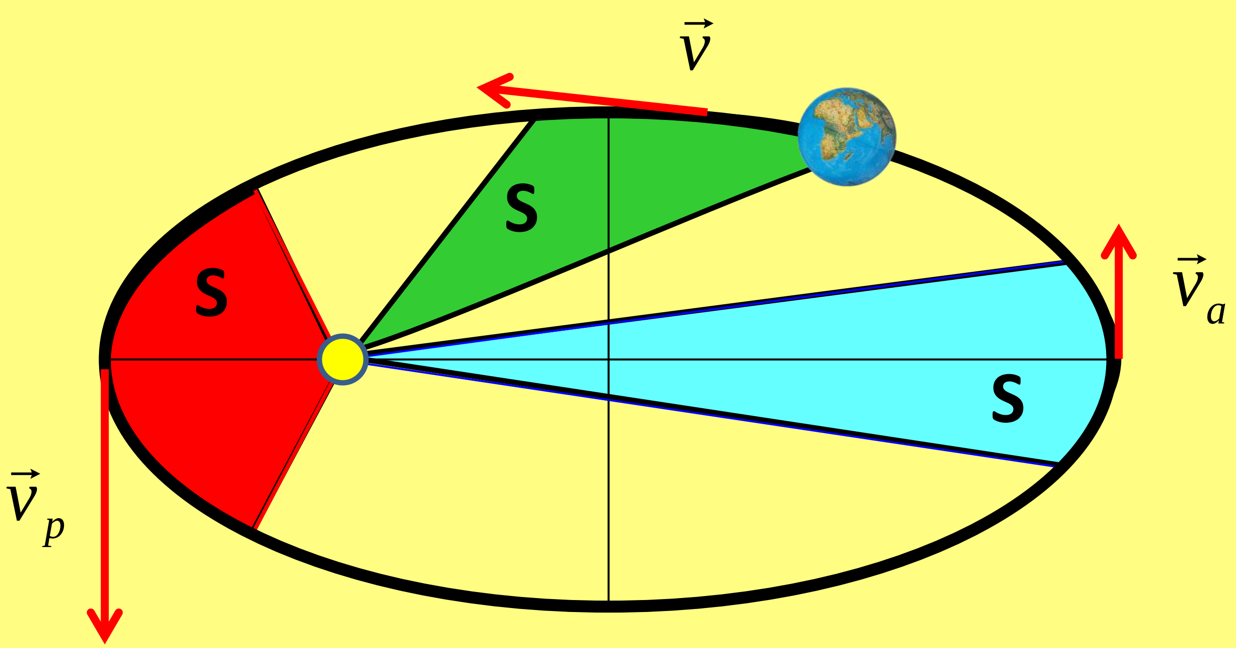
Afélium
odsluní

5.7. POHYBY TĚLES V GRAVITAČNÍM POLI SLUNCE

KEPLEROVY ZÁKONY – popisující pohyby planet

2. **Určuje, jak se planety pohybují.**
   Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní.
   Důsledek: pohyb planet kolem Slunce je nerovnoměrný.
   V **perihéliu** je rychlost planety největší, v **aféliu** nejmenší.

$$v_a < v_p$$



5.7. POHYBY TĚLES V GRAVITAČNÍM POLI SLUNCE

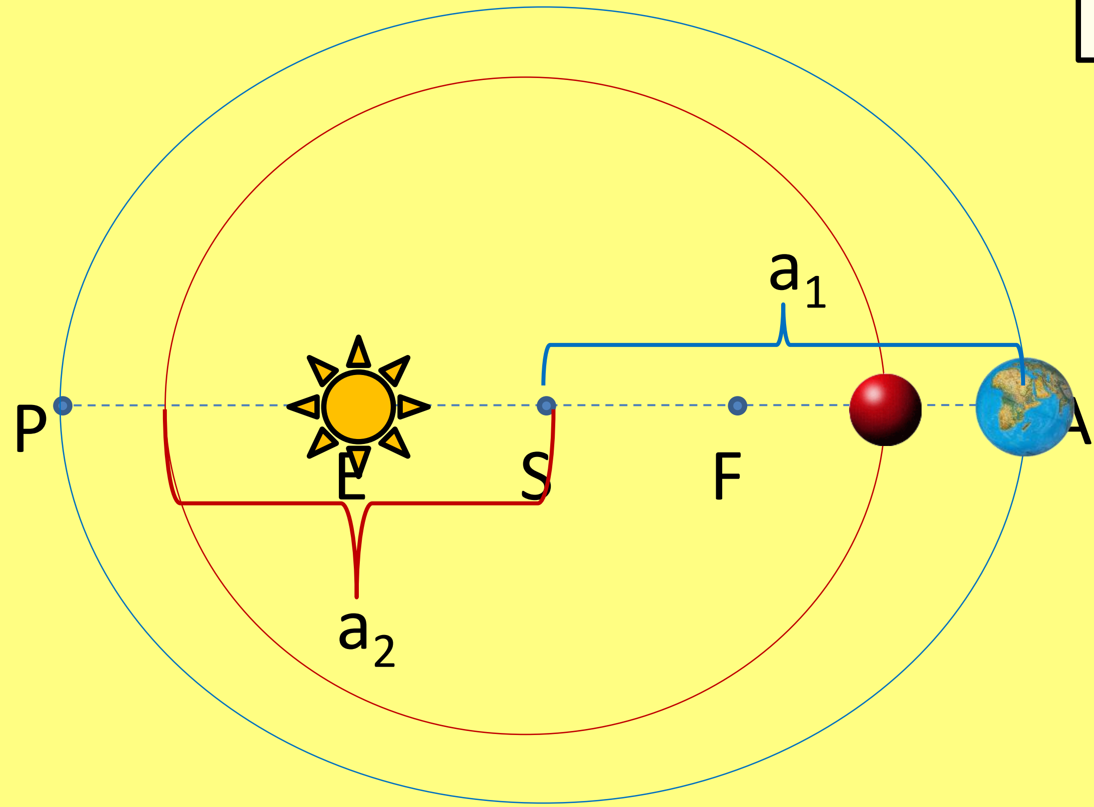
KEPLEROVY ZÁKONY – popisující pohyby planet

3. Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií.

T_1, T_2 – oběžné doby dvou planet
a_1, a_2 – hlavní poloosy
(dráhy planet jsou málo odlišné od kružnic)

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} \approx \frac{r_1^3}{r_2^3}$$



5.7. POHYBY TĚLES V GRAVITAČNÍM POLI SLUNCE

⇒ lze vypočítat poměrné vzdálenosti planet od Slunce, známe-li oběžné doby.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

$T_{země}$ = 1 rok

$r_{země}$ = 1AU = astronomická jednotka

1AU = $149{,}6.10^6$ km – střední vzdálenost Země od Slunce

$$\frac{T_1^2}{T_{ZEMĚ}^2} = \frac{a_1^3}{a_{ZEMĚ}^3}$$

$$T_1 = 1\sqrt{\frac{a_1^3}{1}}\,let$$

$$a_1 = 1\sqrt[3]{\frac{T_1^2}{1}}\,AU$$

$$T_1 = \sqrt{a_1^3}\,let$$

$$a_1 = \sqrt[3]{T_1^2}\,AU$$

VRHY	v	x, y (s, h)	t	D (H)
svislý vzhůru	$v = v_0 - gt$	$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$	$t_h = \frac{v_0}{g}$	$H = \frac{v_0^2}{2g}$
vodo-rovný	$v_x = v_0$ $v_y = gt$ $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$	$x = v_0 t$ $y = h - \frac{1}{2} g t^2$	$t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}}$	$D = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$
šikmý vzhůru	$v_x = v_0 \cos\alpha$ $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$ $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$	$x = v_0 t \cos\alpha$ $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$	$t = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$	$D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ $H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$